RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Mathématiques** Durée : 4h — Coefficient : 4 **Session principale**

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$,

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \widehat{\overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$.

Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$.

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

En déduire que le rapport de f est égal à $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de g.

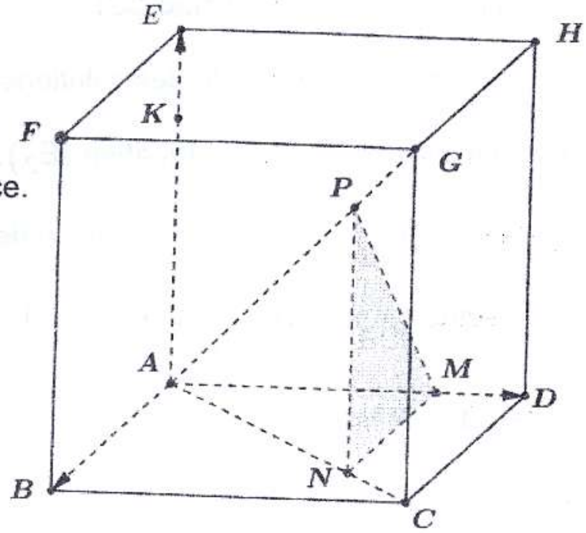
c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 2 (3,5 points)



L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.

On pose $M = h(D)$.

a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments $[AC]$ et $[AG]$ respectivement en N et P. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.

b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K.

Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

3) Soit (S) la sphère de centre le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie h.

Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 (4 points)

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

2) Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3) Soit x une solution de l'équation (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$.

a) Vérifier que $(3\ ,\ 4)$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$.

<u>Exercice 4</u> (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq \ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2\ ,\ 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x :\mapsto e^x - 1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.

6) On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = 2\left(f(x) - \left(g^{-1} o\, f\right)(x) \right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $G_n(x) = 2\left(f_n(x) - \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [\ln(n),+\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t)\,dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - 1$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

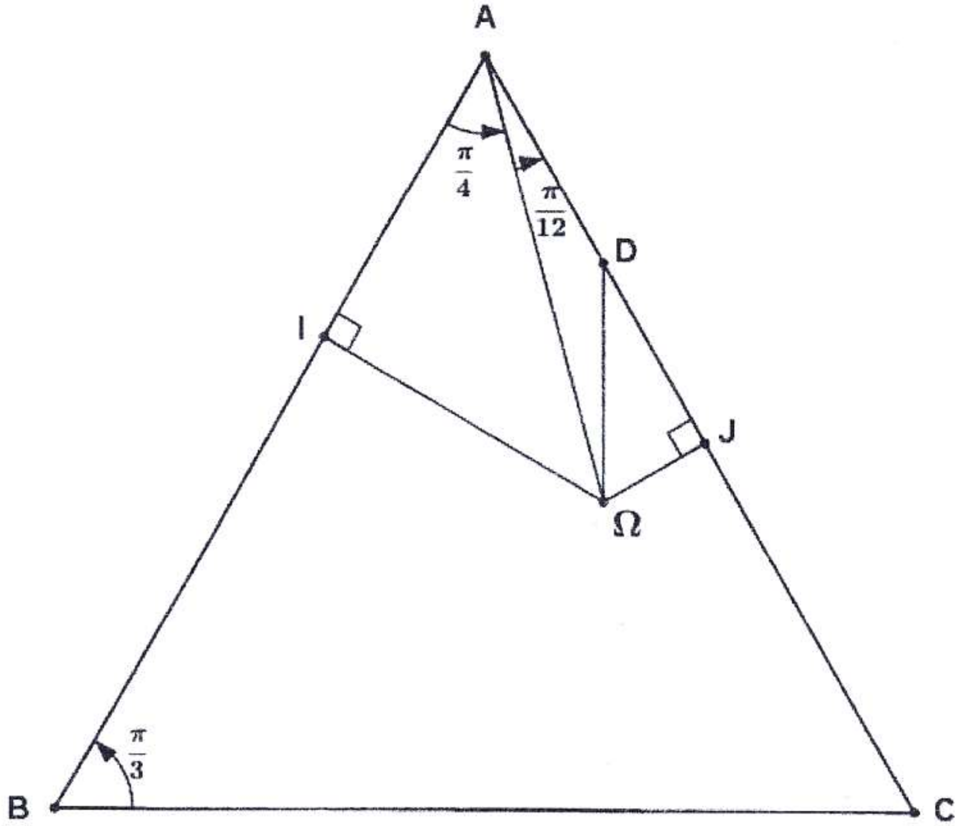


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 2 à rendre avec la copie

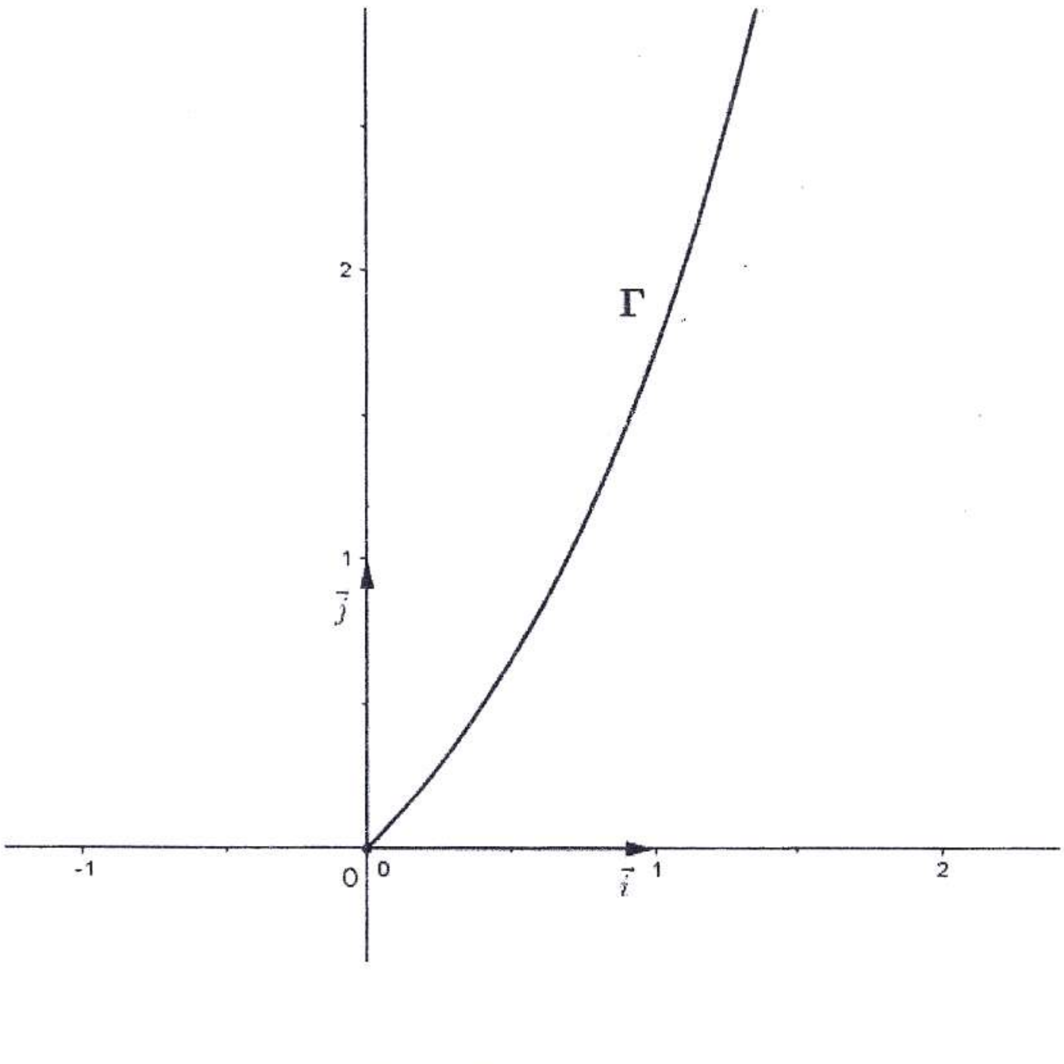


Figure 2