III. القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ) ـ المضاعف المشترك الأصغر (م . م . أ)

ق . م . أ

نرمز ب D_a لمجموعة قواسم العدد a

مثال $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

ملاحظة مجموعة القواسم محدودة

نشاط

حدد عناصر المجموعات التالية :

D_8 و D_{12} و $D_8 \cap D_{12}$

$\cap$: علامة التقاطع

$D_8 = \{1,2,4,8\}$

$D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

$D_8 \cap D_{12} = \{1,2,4\}$

الأعداد 1 و2 و4 هي قواسم للعددين 8 و12 في نفس الوقت

$D_8 \cap D_{12}$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين 8 و 12

العدد 4 هو أكبر قاسم مشترك للعددين 8 و12

نقول إذن أن 4 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و12 و نكتب 4 = ق . م . أ (8 , 12)

عموما

ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له

بـ ق . م . أ (a , b) هو أكبرقاسم مشترك

للعددين a و b

أي هو أكبر عدد في المجموعة $D_a \cap D_b$

مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b

تطبيق

جد عناصر المجموعات التالية D_{15} و D_{20}

و $D_{20} \cap D_{15}$

ثم استنتج الق. م . أ (15,20)

$D_{15} = \{1,3,5,15\}$

$D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$

$D_{15} \cap D_{20} = \{1,5\}$

م . م . أ

نرمز ب M_a لمجموعة مضاعفات العدد a

$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \dots\}$

ملاحظة مجموعة المضاعفات غير محدودة

نشاط

حدد عناصر المجموعات التالية الأصغر من 40 :

M_3 و M_4 و $M_4 \cap M_3$

$M_3 = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,..\}$

$M_4 = \{0,4,8,12,14,20,24,28,32,36,40, \dots\}$

$M_3 \cap M_4 = \{0,12,24,36,..\}$

الأعداد 0 و 12 و 24 و 36 و 48 و ....هي مضاعفات للعددين 3و 4 في نفس الوقت

$M_3 \cap M_4$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين 3 و 4

العدد 0 هو أصغر مضاعف مشترك للعددين 3 و4

العدد 12 هو أصغر مضاعف مشترك مخالف لصفر للعددين 3 و4

نقول إذن أن 12 هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3و4 و نكتب 12= ق . م . أ (4 , 3)

عموما

ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له

بـ م . م . أ (a , b) هو أصغرمضاعف مشترك مخالف لصفر للعددين a و b

أي هو أصغرعدد مخالف لصفرفي المجموعة $M_a \cap M_b$

مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b

تطبيق

جد عناصر المجموعات التالية الأصغرمن 100

M_{15} و M_{20} و $M_{15} \cap M_{20}$

ثم استنتج م . م . أ (15, 20)

$M_{15} = \{0,15,30,45,60,75,90,..\}$

$M_{20} = \{0,20,40,60,80,100, \dots\}$

$M_3 \cap M_4 = \{0,60,120..\}$

إذن $(15, 20)$ أ . م . م = 60

ملاحظة

1)

لدينا $(3,4)$ أ . م . م = 12

و $M_3 \cap M_4 = \{0,12,24,36,..\}$

نلاحظ أن $0,12,24,36,....$ هي مضاعفات العدد 12

أي $M_{12} = \{0,12,24,36,..\}$

و بالتالي $M_3 \cap M_4 = M_{12}$

المضاعفات المشتركة لعددين هي مضاعفات لمضاعفهما المشترك الأصغر

إذا كان (a , b) أ . م . م = c

فإن $M_a \cap M_b = M_c$

2)

$(7 , 4)$ أ . م . م = ?

$M_7 = \{0,7,14,21,35,42,47,56,63,..\}$

$M_4 = \{0,4,8,12,14,20,24,28,32,36,40,44,48,56, ...\}$

$M_3 \cap M_4 = \{0,28,56,..\}$

إذن $(7 , 4)$ أ . م . م = 28

$(3 , 5)$ أ . م . م = ?

$M_3 = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30..\}$

$M_5 = \{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45 ...\}$

$M_3 \cap M_5 = \{0,15,30,..\}$

إذن $(3 , 5)$ أ . م . م = 30

$(4 , 9)$ أ . م . م = ?

$M_4 = \{0,4,8,12,16,20,21,24,28,32,36..\}$

$M_9 = \{0,9,18,27,36,45,54, ...\}$

$M_4 \cap M_9 = \{0,36,..\}$

إذن $(4 , 9)$ أ . م . م = 36

لاحظ أن المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين فيما بينهما يساوي جداءهما

إذن $(15, 20)$ ق م أ = 5

ملاحظة

1)

لدينا $(8,12)$ أ . م . ق = 4

و $D_8 \cap D_{12} = \{1,2 ,4\}$

نلاحظ أن 1 و 2 و4 هي قواسم العدد 4

أي $D_4 = \{1,2 ,4\}$

و بالتالي $D_8 \cap D_{12} = D_4$

القواسم المشتركة لعددين هي قواسم لقاسمهما المشترك الأكبر

إذا كان (a,b) أ . م . ق = c

فإن $D_8 \cap D_{12} = D_c$

2)

$(15,29)$ أ . م . ق = ?

$D_{15} = \{1,3 ,5, 15\}$

$D_{29} = \{1 , 29\}$ لأن 29 عدد أولي

$D_{15} \cap D_{29} = \{1\}$

إذن $(15, 29)$ ق م أ = 1

$(3,5)$ أ . م . ق = ?

$D_3 = \{1,3\}$ لأن 3 عدد أولي

$D_5 = \{1 , 5\}$ لأن 5 عدد أولي

$D_3 \cap D_5 = \{1\}$

إذن $(3, 5)$ ق م أ = 1

$(4,9)$ أ . م . ق = ?

$D_4 = \{1,2,4\}$

$D_9 = \{1 ,3,9\}$

$D_4 \cap D_9 = \{1\}$

إذن $(4, 9)$ ق م أ = 1

إذا كان القاسم المشترك الأكبر لعددين يساوي 1 نقول أن العددين أوليان فيما بينهما

ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما إذن

(a , b) أ . م . ق = 1 و $a \times b$ = م . م . (a , b) أ

طريقة أخرى لحساب الق . م . أ لعددين

1) نعلم أن

$D_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

و $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$

إذن $D_{20} \cap D_{24} = \{1,2,4\}$

و بالتالي $4 = ق\ م\ أ\ (20, 24)$

2) نفكك الأعداد 24 و 20 و 4

إلى جذاء عوامل أولية

$24 = 2^3 \times 3$ و $20 = 2^2 \times 5$

و $4 = 2^2$

3) نلاحظ أن في تفكيك الق . م . أ (24 , 20)

و هو 4 نجد العوامل المشتركة المرفوقة بأصغر

دليل قوة (2^2) فقط

أيضا

$12 = ق\ .\ م\ .\ أ\ (24, 36)$

تفكك الأعداد 24 و36 و12إلى جذاء عوامل

أولية

$24 = 2^3 \times 3$ و $36 = 2^2 \times 3^2$

و $12 = 2^2 \times 3$

نلاحظ أن في تفكيك الق. م.أ (36 , 24) و هو

12 نجد العوامل المشتركة المرفوقة بأصغر دليل

قوة (2^2 و 3)

عموما

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين هو جذاء العوامل الأولية المشتركة المرفوقة دليل قوة في تفكيك العددين إلى جذاء عوامل أولية

تطبيق

1) ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان

حيث $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

و $b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

استنتج تفكيكا إلى جذاء عوامل أولية لـ

ق . م . أ (a , b)

بما أن $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

و $b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

فإن

(a , b) ق. م .أ $= 2^2 \times 3^2 \times 5$

طريقة أخرى لحساب الم .م .أ لعددين

1) نعلم أن

$M_{24} = \{0,24,48,72,96,120,144, \dots\}$

و $M_{20} = \{0,20,40,60,80,100,120,140, \dots\}$

إذن $M_{20} \cap M_{24} = \{0, 120, \dots\}$

و بالتالي $120 = م\ .\ م\ .\ أ\ (20, 24)$

2) نفكك الأعداد 24 و 20 و 120

إلى جذاء عوامل أولية

$24 = 2^3 \times 3$ و $20 = 2^2 \times 5$

و $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

3) نلاحظ أن في تفكيك الم . م . أ (24 , 20) و هو 120 نجد

العوامل المشتركة المرفوقة بأكبر دليل قوة (2^3)

و الغير المشتركة (3 و 5)

أيضا

$72 = م\ .\ م\ .\ أ\ (24, 36)$

نفكك الأعداد 24 و 36 و12 إلى جذاء عوامل أولية

$24 = 2^3 \times 3$ و $36 = 2^2 \times 3^2$

و $72 = 2^3 \times 3^2$

نلاحظ أن في تفكيك الم . م . أ (36 , 24) و هو 72 نجد العوامل

المشتركة المرفوقة بأكبر دليل قوة (2^3 و 3^2)

عموما

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين هو جذاء العوامل الأولية المشتركة المرفوقة دليل قوة في تفكيك العددين إلى جذاء عوامل أولية

تطبيق

1) ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان

حيث $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

و $b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

استنتج تفكيكا إلى جذاء عوامل أولية لـ م . م . أ (a , b)

بما أن $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

و $b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

فإن

(a , b) م. م .أ $= 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$

2) أحسب ق . م . أ (180,108)

بما أن $108 = 2^2 \times 3^3$

و $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

فإن

$36 = 2^2 \times 3^2$ = ق . م .أ (180 ,108)

1) أحسب ق . م . أ (50,100)

بما أن $100 = 2^2 \times 5^2$

و $50 = 2 \times 5^2$

فإن

$50 = 2 \times 5^2$ = ق . م .أ (50 ,100)

ملاحظة

ليكن a و b عددان صحيحان طبيعيان

إذا كان b قاسم لـ a فإن

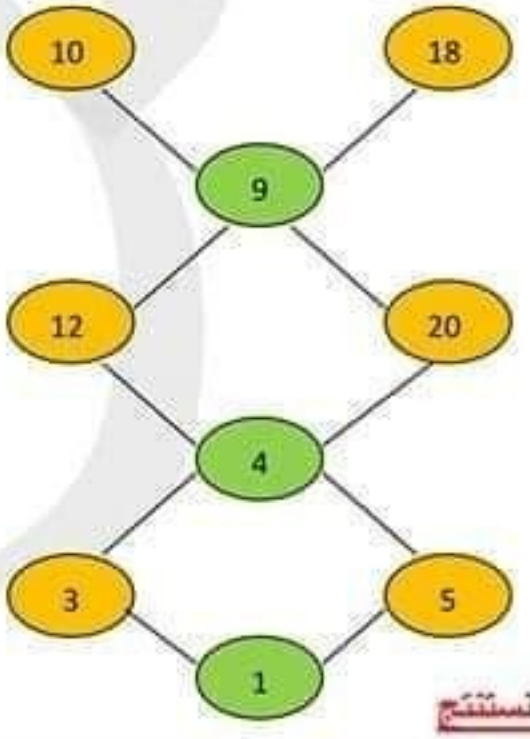
وبالتالي b = ق . م . أ (a , b)

مثال 25= ق . م . أ (3975 , 25)

طريقة أخرى لحساب الق . م . أ

? = ق . م . أ (108,180)

نقسم 180 و108 على أي قاسم مشترك ثم نقسم خارجي القسمة على اي قاسم مشترك إلى أن نتحصل على عددين أوليين فيما بينهما



نستنتج

$36 = 1 \times 4 \times 9$= ق. م. أ (108 , 180)

طريقة أخرى

نقسم 180 على 108

$180 = 108 \times 1 + 72$

$108 = 72 \times 1 + 36$

$72 = 36 \times 2 + 0$

2) أحسب م . م . أ (180,108)

بما أن $108 = 2^2 \times 3^3$

و $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

فإن

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ =م . م .أ (180 ,108)

3) أحسب م. م . أ (50,100)

بما أن $100 = 2^2 \times 5^2$

و $50 = 2 \times 5^2$

فإن

$100 = 2^2 \times 5^2$ = م . م .أ (50 ,100)

a مضاعفا لـ b

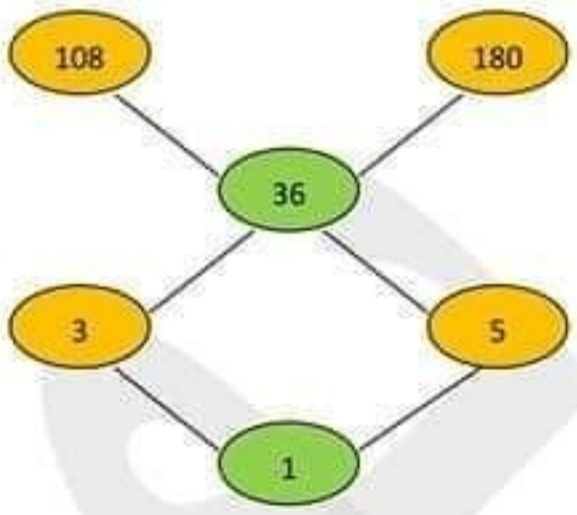
و a = م . م . أ (a , b)

3975= م . م . أ (3975 , 25)

طريقة أخرى لحساب الم . م . أ

? = م . م . أ (108,180)

نقسم 180 و108 على الق. م .أ فنتحصل على خارجي قسمة أوليين فيما بينهما



نستنتج

$540 = 3 \times 180 = 5 \times 108$=م. م . أ (108 , 180)