الحصر

1) – حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$x + z \le a + b \le y + t$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$

لنحصر $x + y$.

لدينا : $3 + (-4) \le x + y \le 8 + 2$

إذن : $-1 \le x + y \le 10$

2) – حصر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \le a \le y$

سيكون لدينا : $-y \le -a \le -x$

3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

ملاحظة هامة : لحصر $a - b$ ، نكتب $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$ ؛ لنحصر $x - y$.

لدينا : $-2 \le -y \le 4$ و $3 \le x \le 8$ إذن : $3 - 2 \le x + (-y) \le 8 + 4$

و منه فإن : $1 \le x - y \le 12$

4) – حصر جداء عددين حقيقيين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$x \times z \le a \times b \le y \times t$

* مثال 1 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $1 \le y \le 3$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $3 \times 1 \le x \times y \le 7 \times 3$ إذن : $3 \le x \times y \le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \le x \le -2$ و $3 \le y \le 6$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $2 \le -x \le 5$ إذن : $2 \times 3 \le (-x) \times y \le 5 \times 6$ أي
$6 \le -xy \le 30$

و منه فإن : $-30 \le xy \le -6$.

5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة

و حيث : $x \le a \le y$

لدينا : $\frac{1}{y} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{x}$

6) – حصر خارج عددين :

ملاحظة هامة : لحصر $\frac{a}{b}$ ، نكتب $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

*مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $5 \le y \le 9$ ؛ لنحصر $\frac{x}{y}$.

لدينا : $\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

تمرين تطبيقي محوصل :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6\le a\le 8$ و $-4\le b\le -2$ و $-3\le c\le 5$

أحصر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\dfrac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – حصر a^2 .

لدينا : $6^2\le a^2\le 8^2$ و منه فإن : $\underline{36\le a^2\le 64}$

2) – حصر b^2 .

لدينا : $(-2)^2\le b^2\le (-4)^2$ و منه فإن : $\underline{4\le b^2\le 16}$

3) – حصر $a+2b-4c$.

لدينا : $-8\le 2b\le -4$ و $-4\times(-3)\le -4c\le -4\times 5$ أي $12\le -4c\le 20$

إذن : $6+(-8)+12\le a+2b-4c\le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $\underline{10\le a+2b-4c\le 24}$

4) – حصر $\dfrac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4)\le a+b\le 8+(-2)$ أي $2\le a+b\le 6$ و $\dfrac{1}{16}\le\dfrac{1}{b^2}\le\dfrac{1}{4}$

إذن : $2\times\dfrac{1}{16}\le(a+b)\times\dfrac{1}{b^2}\le 6\times\dfrac{1}{4}$ أي $\dfrac{2}{16}\le\dfrac{a+b}{b^2}\le\dfrac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\underline{\dfrac{1}{8}\le\dfrac{a+b}{b^2}\le\dfrac{3}{2}}$