RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Mathématiques** Durée : 4h — Coefficient : 4 **Session de contrôle**

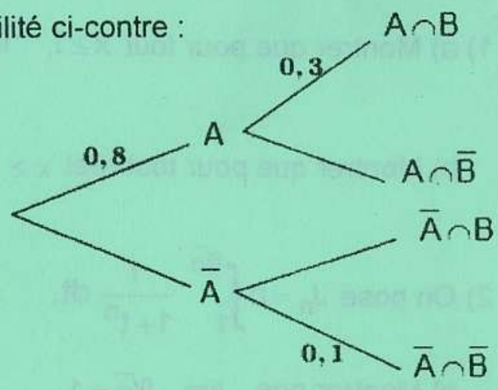
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre :



1) La probabilité de l'évènement $\overline{B}$ sachant A est égale à :

a) 0,7   b) 0,24   c) 0,11

2) La probabilité de l'évènement $\overline{A}\cap B$ est égale à :

a) 0,11   b) 0,18   c) 0,92

3) La probabilité de l'évènement A sachant B est égale à :

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{7}$

<u>Exercice 2</u> (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On note Δ est la médiatrice du segment $[IE]$ et on pose $f = S \circ S_{\Delta}$.

a) Montrer que $S(I)=B$. En déduire que $f(E)=B$.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser $f \circ f$. En déduire que $f(B)=C$.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que $f(J)=K$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C)=A$ et $g(K)=I$.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose $D=g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI).

c) Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = g \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D=\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$. En déduire que $\left(\overrightarrow{\Omega E}, \widehat{\overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F=\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$. Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F=\varphi \circ \varphi(I)$. En remarquant que $IB=IE$, montrer que $FD=FA$.

d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1=0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions).

b) Déterminer z_1+z_2. En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1|>1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes respectives z_1, z_2, 1 et -1.

2) a) Soit C le milieu du segment $[AB]$. Montrer que l'affixe du point C est $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_1z_2$, montrer que $(z_2-z_1)^2=4\left(z_C^2-1\right)$.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{CI}}\right)+\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O,\vec{v})$. On pose $z_K = i\,y$, où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. Justifier que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(|z-iy|^2=|1-iy|^2\right)$.

En déduire que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(z\bar{z}+iy(z-\bar{z})=1\right)$.

c) En remarquant que $z_1=\frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C).

4) a) Construire le point C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$.

c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=x+1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente T à (C_f) au point A est $y=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0\,,-1-\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite D d'équation $y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction $x : \mapsto x^2 + 1$.

a) Construire les points A et B.

b) Construire la tangente T et tracer la courbe (C_f).

B) Soit n un entier naturel non nul.

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f\left(t^n\right) dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f\left(x^n\right)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x) = x\, f\left(x^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n}\, dt$.

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n}\, dt$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

b) En utilisant B)1)a), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

	Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série :	Signatures des surveillants
	Nom et Prénom :	. . . .
	Date et lieu de naissance :	. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

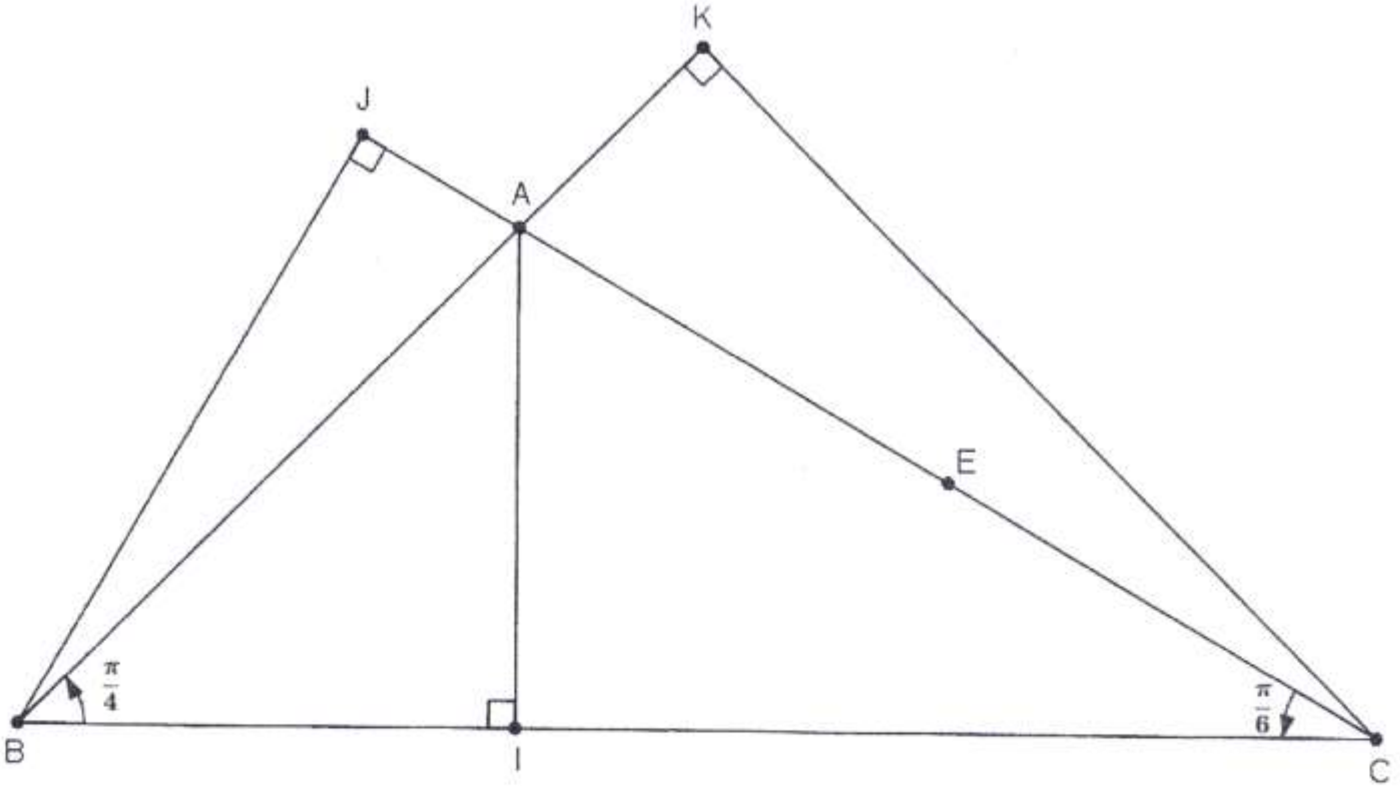


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 2 à rendre avec la copie

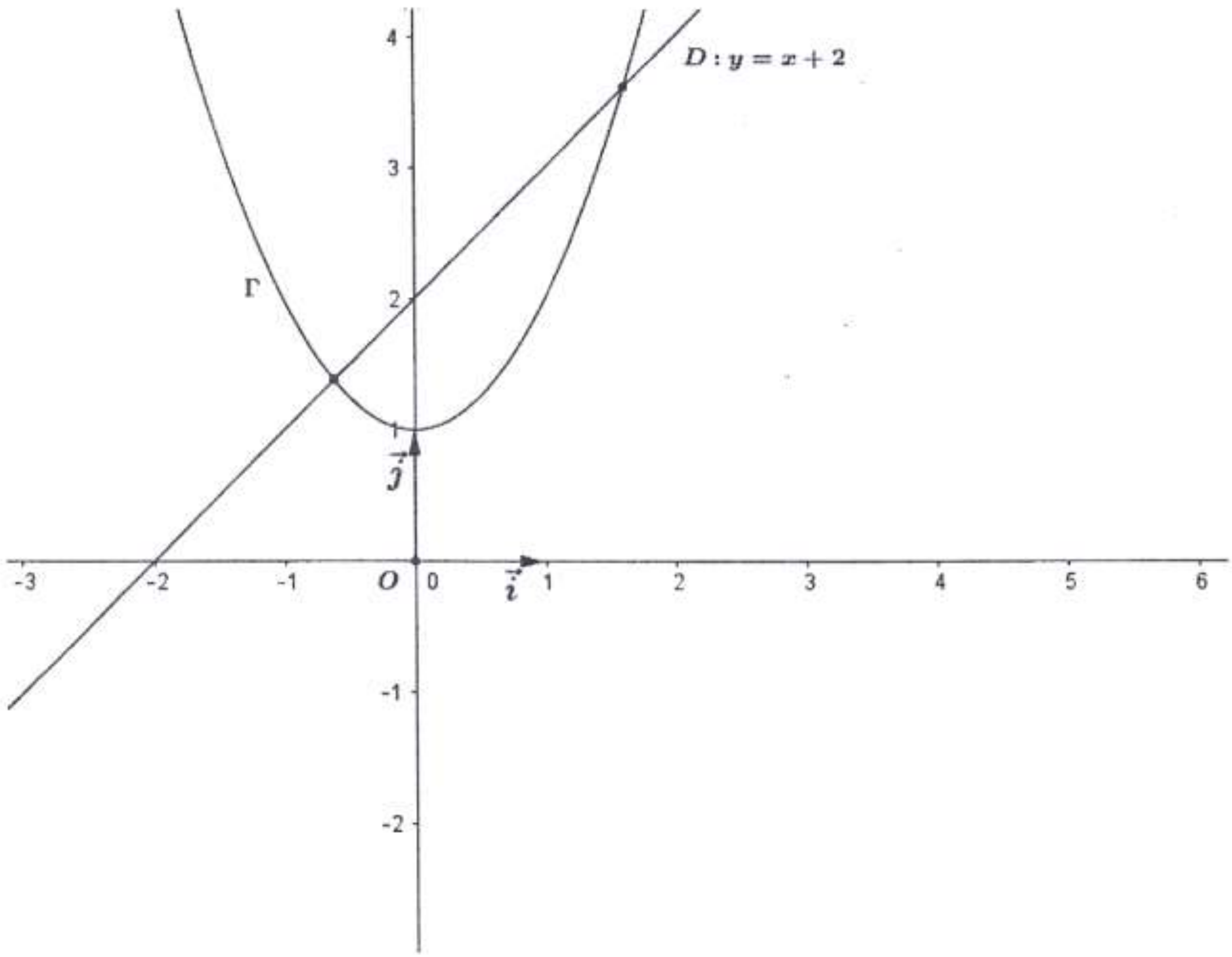


Figure 2