

**Exercice n°1**

*De quoi s'agit-il ?*

*Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites*

**CORRIGÉ**

- 1) Réponse - c -                      2) Réponse - a -                      3) Réponse - c -                      4) Réponse - c -

**Exercice n°2**

*De quoi s'agit-il ?*

*Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.*

**CORRIGÉ**

1) a- En posant  $t = -x$  on aura  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \frac{-t}{+\infty} - \frac{te^t}{0} - \frac{e^t}{0} \right) = +\infty$ .

b- En posant  $t = -x$  on aura  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( -\frac{te^t}{0} - \frac{e^t}{0} \right) = 0$

Donc la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}$ ) au voisinage de  $+\infty$ .

c- Soit  $x \in [0, +\infty[$  ;  $f(x) - x = (x-1)e^{-x}$

sur  $[0, 1]$  la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est située au dessous de  $\Delta$ .

sur  $[1, +\infty[$  la courbe ( $\mathcal{C}$ ) est située au dessus de  $\Delta$ .

2) a-  $f$  est définie et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $f([0, +\infty[)$

de plus  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc  $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$ .

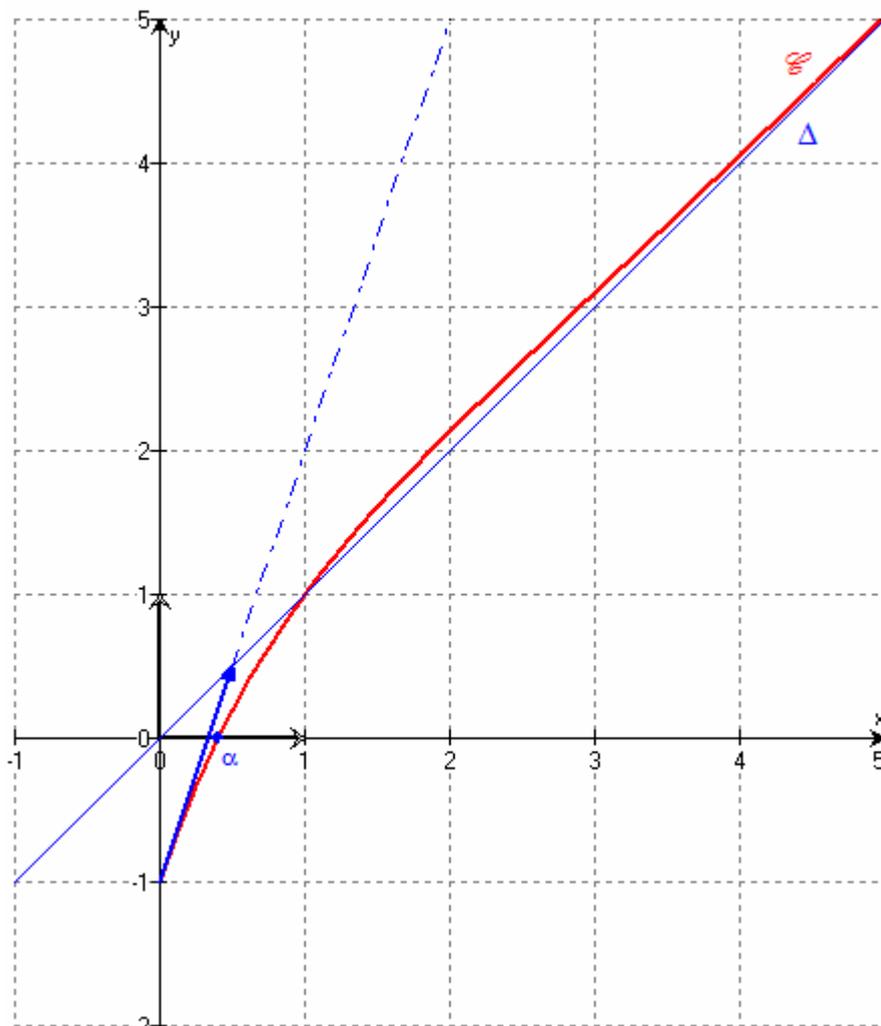
Comme  $0 \in [-1, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $[0, +\infty[$  une solution unique  $\alpha$ .

Puisque  $f(0) = -1 < 0$  ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$  donc  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

Conclusion : L'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $[0, +\infty[$  une solution unique  $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ .

b- D'après le tableau de variation de la fonction  $f$  on a :  $f'(0) = 3$

donc la demi tangente à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



$$3) \text{ a- } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 (x + (x-1)e^{-x}) dx = \int_{\alpha}^1 x dx + \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx$$

$$\text{Or } \int_{\alpha}^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$$

$$\int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx \quad \text{on intègre par parties on pose : } \begin{cases} u(x) = x-1 \rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Par suite } \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx = [-(x-1)e^{-x}]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_{\alpha}^1 = -\frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$$

$$\text{donc } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}.$$

Interprétation :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [\alpha, 1]$  donc  $u_1$  représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations :  $y = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = \alpha$

b- sur  $[0,1]$  la courbe  $(\mathcal{C})$  est situé au dessous de  $\Delta$  donc pour tout réel  $x \in [0,1]$  ,  $f(x) \leq x$

de plus pour tout  $x \in [\alpha, +\infty[$  ,  $f(x) \geq 0$  et  $\alpha < 1$  ainsi pour tout  $x \in [\alpha, 1]$  on a :  $0 \leq f(x) \leq x$

par suite  $0 \leq \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \leq \int_{\alpha}^1 x^n dx$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 \quad \text{or} \quad \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{donc} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  et  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice n°3

*De quoi s'agit-il ?*

*Suites adjacentes*

### ***CORRIGÉ***

1) Montrons, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $u_n \leq v_n$ .

□ vérification : pour  $n = 1$  l'inégalité  $u_1 \leq v_1$  est vraie ( car  $u_1 = \frac{1}{3}$  et  $v_1 = \frac{2}{5}$  )

□ soit  $n \in \mathbb{N}^*$  , supposons que  $u_n \leq v_n$  et montrons que  $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

$$\text{Comme } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{15} \leq 0 \quad \text{car } u_n - v_n \leq 0 \quad \text{donc } u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $u_n \leq v_n$ .

2) □  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\frac{u_n - v_n}{3} \geq 0$  car  $u_n - v_n \leq 0$  donc  $(u_n)$  est une suite croissante.

□  $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \leq 0$  car  $u_n - v_n \leq 0$  donc  $(v_n)$  est une suite décroissante.

3) Première méthode

□ pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $u_n \leq v_n$  et  $(v_n)$  est une suite décroissante donc  $(v_n)$  est majoré par  $v_0 = 1$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $u_n \leq 1$ .

Ainsi  $(u_n)$  est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

□ pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $v_n \geq u_n$  et  $(u_n)$  est une suite croissante donc  $(u_n)$  est minoré par  $u_0 = 0$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $v_n \geq 0$ .

Ainsi  $(v_n)$  est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

□ On pose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = l'$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = l$$

Comme  $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$  donc les opérations sur les limites des suites donnent  $l = \frac{2l + l'}{3}$

D'où  $l = l'$

### Deuxième méthode

D'après ce qui précède on a :  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15}(u_n - v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité  $u_0 - v_0 = -\left(\frac{1}{15}\right)^0$  est vraie ( car  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et  $-\left(\frac{1}{15}\right)^0 = -1$ )

supposons que  $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que  $u_{n+1} - v_{n+1} = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a :  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15} \left[ -\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = 0$  car  $\left(\frac{1}{15}\right) \in ]-1, 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Compte tenu :

□ pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .

□  $(u_n)$  est une suite croissante et  $(v_n)$  est une suite décroissante.

□  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} = 3(2u_n + v_n) + (3u_n + 2v_n) = 9u_n + 5v_n = w_n$

Donc  $(w_n)$  est une suite constante.

b-  $(w_n)$  est une suite constante donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$ .

Par suite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $9u_n + 5v_n = 5$ .

Donc si  $L$  est la limite commune des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  on aura  $9L + 5L = 5$

Ce qui donne  $L = \frac{5}{14}$  ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \frac{5}{14}$ .

### Exercice n°4

*De quoi s'agit-il ?*

*Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.*

### **CORRIGÉ**

$$1) \text{ a- } (\widehat{CA, CB}) \equiv (\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{AB, AC}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{donc } (\widehat{CA, CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

De plus, comme  $ABC$  est un triangle rectangle en  $B$  donc  $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ (\widehat{CA, CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{ce qui justifie que } S(A) = B$$

$$\text{b- } \square \text{ D'une part } (\widehat{AC, AE}) \equiv (\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{CA, CB}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{D'autre part } \left. \begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array} \right\} \text{ donc } (\widehat{EC, ED}) \equiv -(\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$



de plus on a  $\frac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  (II)

d'après (I) et (II) on en déduit  $S(M) = N$

$$4) M \in (AD) \text{ et } E \in (AD) \text{ donc } A, E \text{ et } M \text{ sont alignés de plus } \left. \begin{array}{l} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array} \right\}$$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc  $B, O$  et  $N$  sont alignés.

D'où  $N \in (OB)$  et puisque  $D \in (OB)$  on en déduit alors que  $B, D$  et  $N$  sont alignés.

### Exercice n°5

*De quoi s'agit-il ?*

*Résolution dans  $\mathbb{Z}^2$  d'une équation du type  $ax + by = c$  – détermination des points d'une droite à coordonnées entières*

### **CORRIGÉ**

1) a-  $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$  donc  $(0, -2)$  est solution de (E).

b- Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  solution de (E).

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{array} \right\} \text{ donc } 3x = -4 \times (y + 2)$$

$$\text{comme } \left. \begin{array}{l} 3 \nmid -4 \times (y + 2) \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{array} \right\} \text{ alors d'après Gauss } 3 \mid (y + 2) \text{ ainsi } y = 3k - 2 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

par suite  $3x = -4 \times (3k) \text{ d'où } x = -4k \text{ ainsi } (x, y) = (-4k, 3k - 2) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$

réciroquement : soit  $(x, y) = (-4k, 3k - 2) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$

on a :  $3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8$  donc  $(x, y)$  est solution de (E).

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$

$$2) \text{ a- } \left\{ \begin{array}{l} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ signifie } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right. \text{ signifie } (x, y) = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$$

Donc  $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k| \text{ où } k \in \mathbb{Z}$

Par suite  $AM$  est un multiple de 5. [www.najahni.tn](http://www.najahni.tn)

b-  $N(x, y) \in \Delta$  signifie  $3x + 4y = -8$  signifie  $y = -\frac{8 + 3x}{4}$

Donc  $AN^2 = x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}x^2$  par suite  $AN = \frac{5}{4}|x|$ .

c- Si  $AN$  est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme  $AN = 5|k|$  où  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $\frac{5}{4}|x| = 5|k|$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ainsi  $|x| = 4|k|$  où  $k \in \mathbb{Z}$  d'où  $x$  est un entier

Comme  $y = -\frac{8 + 3x}{4} = -2 - \frac{3x}{4}$  donc  $y = -2 + 3k$  où  $k \in \mathbb{Z}$  d'où  $y$  est un entier

Conclusion : Si  $AN$  est un multiple de 5 alors  $x$  et  $y$  sont des entiers.