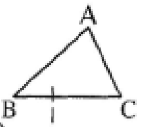
11-المـثـلـثـات

مـراجعة عـــامة

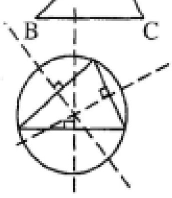
1. في مثلث يكون قيس كل ضلع محصور بين فرق ومجموع قيسي الضلعين الآخرين.



CB-CA<AB و AB<AC+CB

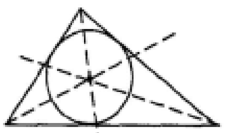
2. **المستقيمات المعتبرة في المثلث:**

أ. **الموسّطات العموديّة لمثلث:**



- الموسّط العمودي لضلع من أضلاع المثلث يسمّى موسّطا عموديًا لهذا المثلث.
- تتقاطع الموسّطات العموديّة لمثلث في نقطة هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث.

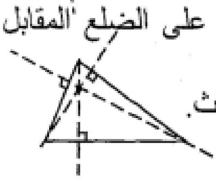
ب. **منصّفات زوايا المثلث:**



- تتقاطع منصّفات زوايا المثلث في نقطة هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث.

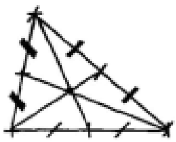
ج. **ارتفاعات المثلث:**

- ارتفاع المثلث هو قطعة المستقيم التي تصل أحد رؤوسه بالمسقط العمودي على الضلع المقابل لذلك الرّأس.



- تتقاطع المستقيمات الحاملة لارتفاعات المثلث في نقطة تسمّى المركز القائم للمثلث.

د. **موسّطات المثلث:**



- موسّط المثلث هو قطعة المستقيم التي تصل أحد رؤوسه بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرّأس.
- تتقاطع موسّطات المثلث في نقطة تسمّى مركز ثقل المثلث.

3. **المثلّثات الخاصّة:**

أ. **المثلث القائم:**

- في المثلث القائم لدينا:
  - ✓ الزّاويتان الحادّتان متتامّتان.
  - ✓ المركز القائم هو رأس الزّاوية القائمة.
- وتر المثلث القائم هو قطر الدّائرة المحيطة به أي في مثلث قائم يكون الوتر ضعف طول الموسّط الصّادر من رأس الزّاوية القائمة.

ب. **مثلث متقايس الضّلعين:**

- في مثلث متقايس الضّلعين:
  - ✓ الزّاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستان.
  - ✓ الموسّط العمودي للقاعدة يمثّل محور تناظر للمثلث.
  - ✓ الموسّط العمودي للقاعدة يحمل كلاً من منصّف الزّاوية والموسّط والارتفاع الصّادرين من القمّة الرئيسيّة.
- كل مثلث له زاويتان متقايستان هو مثلث متقايس الضلعين.

ج. **مثلث متقايس الأضلاع:**

- في مثلث متقايس الأضلاع تنطبق المستقيمات المعتبرة الموافقة لكلّ ضلع.
- تمثّل الموسّطات العموديّة للمثلث المتقايس الأضلاع محاور تناظر له.

التمـــــارين

تمريـــن عـــ01ـــدد: أجب بـ"صواب" أو "خطأ":

أ. في مثلث قائم، الزّاويتان الحادّتان متتامّتان.
ب. وتر المثلث القائم هو قطر الدّائرة المحاطة به.
ج. في مثلث متقايس الضلعين، الزّاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستان.
د. كل مثلث له زاويتان متقايستان هو مثلث متقايس الأضلاع.
ه. في مثلث متقايس الأضلاع تنطبق المستقيمات المعتبرة الموافقة لكلّ ضلع.
و. في مثلث قائم يكون الموسّط الصّادر من رأس الزّاوية القائمة نصف طول الوتر.

تمريـــن عـــ02ـــدد: أكمل الفراغات بما يناسب:

أ. تتقاطع .... لمثلث في نقطة هي مركز الدّائرة المحيطة به.
ب. تتقاطع .... مثلث في نقطة هي مركز الدّائرة المحاطة به.
ج. تتقاطع المستقيمات الحاملة لارتفاعات المثلث في نقطة تسمّى .... للمثلث.
د. تتقاطع موسّطات المثلث في نقطة تسمّى .... المثلث.

تمريـــن عـــ03ـــدد: في أيّ حالة تمثّل النّقاط A و B و C رؤوسا لمثلث؟ علّل جوابك. (وحدة القيس بالصّنتيمتر).

أ. AB=9 ؛ AC=6 ؛ BC=4
ب. AB=2 ؛ AC=5 ؛ BC=7
ج. AB=8 ؛ AC=7 ؛ BC=3
د. AB=3 ؛ AC=4 ؛ BC=8

تمريـــن عـــ04ـــدد:

أ. ابن مثلث ABC حيث $BC = 5\text{cm}$ و $A\hat{B}C=60°$ و $A\hat{C}B=30°$.
ب. احسب $B\hat{A}C$.
ج. استنتج طبيعة المثلث ABC.
د. ابن الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تمريـــن عـــ05ـــدد:

1- أ-ابن مثلث ABC متقايس الضّلعين قمّته الرئيسية A حيث $B\hat{A}C=70°$.
ب-احسب $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$.
2- لتكن النقطة I منتصف [BC].
أ. ماذا يمثل نصف المستقيم [AI) بالنسبة للزّاوية $B\hat{A}C$؟ علّل جوابك.
ب. احسب $B\hat{A}I$.
ج. ماهو المركز القائم للمثلث AIC؟

تمريـــن عـــ06ـــدد:

أ. ابن مثلث ABC متقايس الضّلعين وقائم الزّاوية في A. ثم عيّن النّقطة I منتصف [BC].
ب. قارن $A\hat{C}B$ و $A\hat{B}C$.
ج. ماهو مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC؟ أرسمها.
د. ماهي طبيعة المثلث AIB؟

ه. ماهو المركز القائم للمثلث AIC؟

و. احسب $I\hat{A}B$.

تمريــن عــ07ــدد:

أ. ارسم مثلث ABC حيث AB=5cm و $B\hat{A}C=70°$ و $A\hat{B}C=40°$.

ب. احسب $A\hat{C}B$.

ج. ماهي طبيعة المثلث ABC؟

د. ابن المستقيم Δ الموسّط العمودي للضّلع [BC] حيث Δ يقطع [AB] في النقطة I.

ه. ماهي طبيعة المثلث ICB؟

و. احسب $I\hat{C}A$.

تمريــن عــ08ــدد:

1) أ) ابن مثلثا ABC قائما في A حيث $A\hat{B}C=30°$ وAB=6cm.

ب)احسب $A\hat{C}B$.

ج)ماهو المركز القائم للمثلث ABC؟

2) أ) ابن المستقيم Δ الموسّط العمودي لـ[AC] حيث Δ يقطع [BC] في O.

ب) قارن OA و OC.

ج) ماهي طبيعة المثلث OAC؟

د) احسب $O\hat{A}B$.

ه) ماهي طبيعة المثلث OAB؟

و) استنتج أن O منتصف [BC].

ز) ماهو مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC؟ أرسمها.

تمريــن عــ09ــدد:

1) ابن مثلثا ABC متقايس الأضلاع حيث BC=5cm.

2) أ) ابن (Bx] منصّف الزّاوية $A\hat{B}C$ حيث (Bx] يقطع [AC] في النقطة H.

ب) بيّن أن المثلث BCH قائم في H.

3) أ) ابن (Ay] منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$ حيث (Ay] يقطع (Bx] في النقطة I.

ب) احسب $I\hat{B}C$ و $I\hat{C}B$.

ج) استنتج طبيعة المثلث IBC.

د)ماذا تمثل النقطة I بالنسبة للمثلث ABC؟

تمريــن عــ10ــدد:

ليكن ABC مثلثا حيث $B\hat{A}C=100°$.

1) أ) ابن المستقيمين Δ و'Δ الموسّطين العموديّين للضّلعين [AB] و[AC] على التوالي. Δ و'Δ يتقاطعان في النقطة O.

ب) قارن OB وOC.

د)ماهو مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC؟ أرسمها.

2) أ) ابن $[Bx)$ و$[Cy)$ منصّفي الزّاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ على التوالي حيث $[Bx)$ و$[Cy)$ يتقاطعان في النقطة I.
ب) ماذا يمثّل نصف المستقيم $[AI)$ بالنسبة للزّاوية $B\hat{A}C$ ؟
د)ماهو مركز الدّائرة المحاطة بالمثلث ABC؟ أرسمها.

تمريـــن عـــ11ـــدد:

1) أ) ابن مثلثا MNP قائما في M حيث MN=5cm وMP=3cm. ثم عيّن النقطة I منتصف [NP].
ب)ماذا تمثل القطعة [MI] بالنسبة للمثلث MNP؟
ج)ماهو مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث MNP؟ أرسمها.
د)ماهي طبيعة المثلث IMN؟

2) أ) ارسم الموسّط [PJ] للمثلث MNP حيث [PJ] تقطع [MI] في النقطة G.

ب) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث MNP؟

ج) ماذا يمثل المستقيم (IJ) بالنسبة لـ[MN]؟

د) ماهو المركز القائم للمثلث IJN؟

تمريـــن عـــ12ـــدد:

1) أ) ابن مثلثا ABC حيث BC=6cm و $A\hat{B}C=60°$ و $A\hat{C}B=45°$.
ب) احسب $B\hat{A}C$.

2) أ) ابن $[Bx)$ منصّف الزّاوية $A\hat{B}C$ حيث $[Bx)$ يقطع [AC] في النقطة D.
ب) احسب $A\hat{B}D$ و $A\hat{D}B$.
ج) ماهي طبيعة المثلث ABD؟

3) أ) ابن المستقيم Δ الموسّط العمودي لـ[BD] حيث Δ يقطع [BD] في النقطة I ويقطع [AB] في النقطة E ويقطع [BC] في النقطة F.
ب) احسب $B\hat{E}I$.
ج) ماهي طبيعة المثلث BEF؟
د)استنتج أن I منصّف [EF].

تمريـــن عـــ13ـــدد:

1) أ) ابن زاوية قائمة $x\hat{O}y$ ثم ابن منصّفها $[Oz)$. عيّن النقطتين A وB من $[Ox)$ و$[Oy)$ على التوالي حيث OA=OB.
ب) ماهي طبيعة المثلث OAB؟
ج) استنتج أقيسة زوايا المثلث OAB.

2) لتكن I نقطة تقاطع $[Oz)$ و[AB].
أ)بيّن أن النقطة I منتصف [AB].
ب)ماهي طبيعة المثلث OIA؟

3) أ) ليكن [BK] موسّط المثلث OBA وG نقطة تقاطع [OI] و[BK].
ب) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث OAB؟

4) أ) ابن الدّائرتين(C) و (C') المحيطتين بالمثلثين OAB وOIA على التوالي.
ب) ماهي الوضعيّة النسبيّة لـ (C) و (C')؟

تمريــن عــ14ـــدد:

1)ارسم مثلثا ABC قائما في A حيث $A\hat{B}C=50°$ و AB=5cm.
2)ابن الزّاوية $C\hat{A}x$ حيث $C\hat{A}x=40°$ و[Ax) يقطع [BC] في النقطة I.
3)بيّن أن المثلث IAC متقايس الضّلعين ثم استنتج أن IA=IC.
4)أثبت أن IA=IB.
5) استنتج أن I هي منتصف [BC].
6)ماهو مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC؟ أرسمها.
7)ابن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.
8)المستقيم (BG) يقطع المستقيم (AC) في النقطة J. بيّن أن المستقيم (IJ) هو الموسّط العمودي لـ[AC].

تمريــن عــ15ـــدد:

1) ارسم دائرة (ζ) مركزها O ثم عين عليها نقطة A. ابن المستقيم Δ الموسط العمودي لـ[AO].

2) لتكن E إحدى نقطتي تقاطع الدائرة (ζ) والمستقيم Δ و F نقطة بحيث A تكون منتصف [FO].

بين أن المثلث AEO متقايس الأضلاع.

3) أ- بين أن AF=AO=AE.

ب- استنتج طبيعة المثلث EFO.

4) أ- ماهي الوضعية النسبية للمستقيمين (OE) و (FE)؟

ب- استنتج أن (EF) مماس للدائرة (ζ) في E.

تمريــن عــ16ـــدد

أ) ابن مثلثا ABC متقايس الأضلاع حيث BC=4cm.

2) أ) ابن [Bx) منصف الزاوية $A\hat{B}C$. [Bx) يقطع [AC] في H..

ب) بين أن المثلث BCH قائم الزاوية في H.

3) أ) ابن [Ay) منصف الزاوية $B\hat{A}C$. [Ay) يقطع [Bx) في I.

ب) احسب $H\hat{B}C$ ؛ $I\hat{B}A$ و $I\hat{A}B$

ج) استنتج طبيعة المثلث IBA.

د) ماذا تمثل النقطة I بالنسبة للمثلث ABC؟

تمريـــن عـــ01ـــدد:

أ- صواب ، ب- خطأ ، ج- صواب ، د- خطأ ، هـ- صواب ، و- صواب

تمريـــن عـــ02ـــدد:

أ) الموسّطات العموديّة ، ب) منصّفات زوايا ، ج) المركز القائم ، د) مركز ثقل

تمريـــن عـــ03ـــدد:

أ. $AC-BC=2<AB=9<AC+BC=10$

$AB-BC=5<AC=6<AB+BC=13$

$AB-AC=3<BC=4<AB+AC=15$

كل ضلع محصور بين فرق ومجموع قيسي الضّلعين الآخرين. إذن النقاط A و B و C تمثل رؤوسا لمثلث.

ب. $BC=AB+AC=7$

قيس الضّلع [BC] مساو لمجموع قيسي الضّلعين [AB] و[AC]. إذن النقاط A و B و C لا تمثل رؤوسا لمثلث.

ج. $AC-BC=4<AB=8<AC+BC=10$

$AB-BC=5<AC=7<AB+BC=11$

$AB-AC=1<BC=3<AB+AC=15$

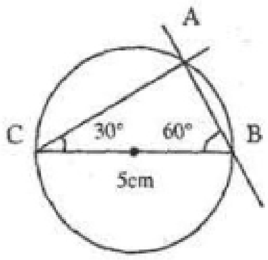
كل ضلع محصور بين فرق ومجموع قيس الضّلعين الآخرين. إذن النقاط A و B و C تمثل رؤوسا لمثلث.

د. $AB=3<BC+AC=12$

$AB=3<BC-AC=4$

قيس الضّلع [AB] أصغر من فرق ومجموع قيسي الضّلعين [BC] و[AC].

إذن النقاط A و B و C لا تمثل رؤوسا لمثلث.



تمريـــن عـــ04ـــدد:

أ. انظر الرسم

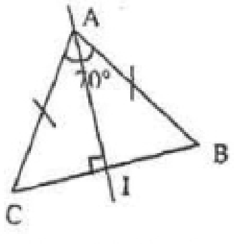
ب. نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث ABC يساوي 180°. لذا:

$$B\hat{A}C=180°-(A\hat{B}C+A\hat{C}B)=180°-(60°+30°)=180°-90°=90°$$

ج. بما أن $B\hat{A}C=90°$ فإن المثلث ABC قائم الزّاوية في A.

د. نعلم أن في مثلث قائم الزاوية مركز الدّائرة المحيطة به هو منتصف الوتر.

وبما أن المثلث ABC قائم الزّاوية في A فإن مركز الدّائرة المحيطة به هو منتصف الوتر [BC].



تمريـــن عـــ05ـــدد:

1) أ) انظر الرسم

ب) نعلم أن في مثلث متقايس الضلعين الزّاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستان.

لذا في المثلث المتقايس الضّلعين ABC الزّاويتان المجاورتان لقاعدته [BC]

متقايستان أي: $A\hat{B}C=A\hat{C}B$.وبما أن مجموع أقيسة زواياه يساوي 180°، فإن:

$$A\hat{B}C=A\hat{C}B=\frac{180°-70°}{2}=55°$$

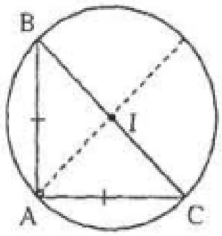
2) أ) لدينا النقطة I منتصف القاعدة [BC]. لذا القطعة [AI] تمثل موسّط المثلث ABC الموافق للقاعدة [BC].
ونعلم أن في مثلث متقايس الضلعين الموسّط العمودي للقاعدة يحمل كلاًّ من منصّف الزّاوية والموسّط والارتفاع الصّادرين من القمّة الرئيسيّة. إذن في المثلث المتقايس الضلعين ABC قاعدته [BC] لدينا:

- [AI] يمثّل كل من الموسّط والارتفاع الصّادرين من A.
- (AI] يمثّل منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$.
- (AI) يمثّل الموسّط العمودي لـ[BC].

ب) بما أن [AI] هو ارتفاع المثلث ABC الصّادر من A فإن: $A\hat{I}B=90°$.

وبما أن (AI] هو منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$ فإن: $I\hat{A}B=\frac{B\hat{A}C}{2}=\frac{70°}{2}=35°$.

ج) بما أن $A\hat{I}C=90°$ فإن المثلث AIC قائم الزّاوية في I.ونعلم أن في مثلث قائم الزّاوية المركز القائم هو رأس الزّاوية القائمة.إذن المركز القائم للمثلث AIC هو I.



تمريـــن عـــ06ـــدد:

أ. انظر الرسم

ب. المثلث ABC متقايس الضّلعين قاعدته [BC]. لذا فإن الزّاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستان. إذن $A\hat{B}C=A\hat{C}B$.

ج. المثلث ABC قائم الزّاوية في A. لذا فإن مركز الدّائرة المحيطة به هو منتصف الوتر [BC]. إذن النقطة I هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

د. لدينا I منتصف الوتر [BC]، لذا [AI] هو الموسّط الصّادر من رأس الزّاوية القائمة.

ونعلم أن في مثلث قائم الزّاوية يكون الوتر ضعف طول الموسّط الصّادر من رأس الزّاوية القائمة. إذن $IA=\frac{BC}{2}=IB$.

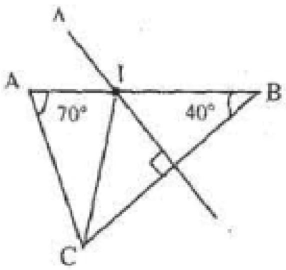
ولدينا ABC متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة A و [AI] هو الموسّط الصّادر من A.

لذا فإن [AI] يمثّل كذلك الارتفاع الصّادر من A وبالتّالي فإن $A\hat{I}B=90°$.

بما أن IA=IB و $A\hat{I}B=90°$ فإن المثلث AIB قائم الزّاوية ومتقايس الضّلعين في I.

ه. لدينا المثلث AIC قائم الزّاوية في I. لذا فإن المركز القائم هو رأس الزّاوية القائمة أي النقطة I.

و. لدينا المثلث ABC متقايس الضّلعين قمّته الرئيســـية A و[AI] الموسّط الصّادر من القمّة A. لذا فإن (AI] يمثّل منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$. إذن: $I\hat{A}B=\frac{B\hat{A}C}{2}=\frac{90°}{2}=45°$.



تمريـــن عـــ07ـــدد:

أ. انظر الرسم

ب. نعلم أن مجموع أقيسة زوايا المثلث ABC يساوي 180°. لذا:

$$A\hat{C}B=180°-(A\hat{B}C+B\hat{A}C)=180°-(40°+70°)=180°-110°=70°$$

ج. لدينا: $A\hat{C}B=B\hat{A}C=70°$. ونعلم أن: إذا كان لمثلث زاويتان متقايستان فهو متقايس الضّلعين.وبما أن للمثلث ABC زاويتان متقايستان $(A\hat{C}B=B\hat{A}C)$ فإنّه متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة B.

د- لدينا النقطة I تنتمي إلى الموسّط العمودي Δ للقطعة [BC] ، لذا I لها نفس البعد عن الطّرفين B و C أي: IB=IC. إذن المثلث IBC متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة I.

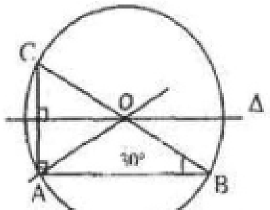
هـ - بما أن المثلث IBC متقايس الضّلعين قاعدته [BC] فإن: $I\hat{C}B=I\hat{B}C=40°$.

ولدينا $I\hat{C}A+I\hat{C}B=A\hat{C}B$. لذا: $I\hat{C}A=A\hat{C}B-I\hat{C}B=70°-40°=30°$.

تمريـــن عـــ08ـــدد:

1) أ)

ب) نعلم أن في مثلث قائم: الزّاويتان الحادّتان متقايستان.



لذا في المثلث ABC القائم في A لدينا $A\hat{B}C+A\hat{C}B=90°$

يعني $A\hat{C}B=90°-A\hat{B}C=90°-30°=60°$.

ج) نعلم أن في مثلث قائم المركز القائم هو رأس الزّاوية القائمة وبما أن المثلث ABC قائم في A فإن المركز القائم هو A.

2) ب - لدينا النقطة O تنتمي إلى الموسّط العمودي Δ للقطعة [AC]. لذا O لها نفس البعد عن الطّرفين A و C أي: OA=OC.

ج-بما أن OA=OC فإن المثلث OAC متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة O.

د-بما أن المثلث OAC متقايس الضّلعين قاعدته [AC] فإن الزّاويتان المجاورتان للقاعدة متقايستان أي:

$O\hat{A}C=O\hat{C}A=60°$. ولدينا $O\hat{A}C+O\hat{A}B=B\hat{A}C$. لذا: $O\hat{A}B=B\hat{A}C-O\hat{A}C=90°-60°=30°$.

هـ-نعلم أن إذا كان لمثلث زاويتان متقايستان فهو متقايس الضّلعين. وبما أن في المثلث OAB لدينا $O\hat{A}B=O\hat{B}A=30°$ فإن OAB مثلث متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة O.

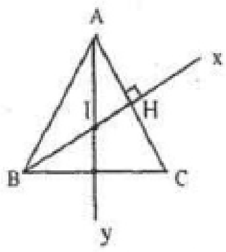
و-لدينا OA=OC (لأن المثلث OAC متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة O) وOA=OB (لأن المثلث OAB متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة O). لذا فإن OC=OB.

وبما أن النقاط O وB وC على استقامة واحدة فإن O منتصف [BC].

ز-نعلم أن في مثلث قائم الزّاوية مركز الدّائرة المحيطة هو منتصف الوتر.

وبما أن المثلث ABC قائم الزّاوية في A فإن مركز الدّائرة المحيطة به هو منتصف الوتر [BC] أي النقطة O.

تمريـــن عـــ09ـــدد:



1)

2)

ب-نعلم أن في مثلث متقايس الأضلاع تنطبق المستقيمات المعتبرة الموافقة لكلّ ضلع.

وبما أن ABC هو مثلث متقايس الأضلاع و(Bx] منصّف الزّاوية $A\hat{B}C$ فإن (Bx] يحمل الارتفاع الصّادر منB وهو [BH] وهذا يعني أن المثلث BCH قائم الزّاوية فيH .

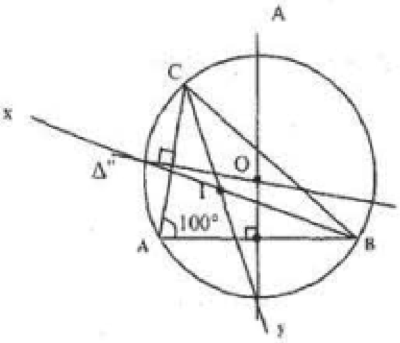
3)ب)نعلم أن زوايا مثلث متقايس الأضلاع متقايسة وقيس كلّ واحدة منها يساوي 60°. وبما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن: $A\hat{B}C=A\hat{C}B=B\hat{A}C=60°$. ولدينا [Bx) منصف الزّاوية $A\hat{B}C$. لذا $I\hat{B}C=\frac{A\hat{B}C}{2}=\frac{60°}{2}=30°$.

بما أن النقطة I هي تقاطع منصّفي الزّاويتين $B\hat{A}C$ و $A\hat{B}C$ فهي تنتمي كذلك إلى منصّف الزّاوية $A\hat{C}B$. لذا: $I\hat{C}B=\frac{A\hat{C}B}{2}=\frac{60°}{2}=30°$.

جـ-لدينا $I\hat{B}C=I\hat{C}B=60°$. لذا المثلث IBC له زاويتان متقايستان. إذن هو متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة I.

د-نعلم أن: تتقاطع منصّفات زوايا المثلث في نقطة هي مركز الدّائرة المحاطة به.

وبما أنّ I هي نقطة تقاطع منصّفات زوايا المثلث ABC فإن I هي مركز الدّائرة المحاطة بالمثلث ABC.



تمريـــن عـــ10ـــدد:

I) ب- لدينا O تنتمي إلى الموسّط العمودي Δ لـ[AB]. لذا O لها نفس البعد عن الطّرفين A و B أي OA=OB. ولدينا O تنتمي إلى الموسّط العمودي 'Δ لـ[AC]. لذا O لها نفس البعد عن الطّرفين A و C أي OA=OC. وبما أن OA=OB و OA=OC فإن OB=OC.

ج- نعلم أن: تتقاطع الموسّطات العموديّة لمثلث في نقطة هي مركز الدّائرة المحيطة به.وبما أن O هي نقطة تقاطع الموسّطين العموديّين للضّلعين [AB] و [AC] فإن O هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC.

1) 2)ب - نعلم أن في المثلث تتقاطع منصّفات زواياه في نقطة هي مركز الدائرة المحاطة به.

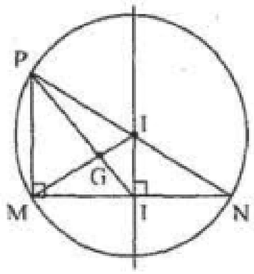
وبما أن I هي نقطة تقاطع منصّفي الزّاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ فهي تنتمي كذلك إلى منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$. وبالتالي فإن [AI) يمثل منصّف الزّاوية $B\hat{A}C$.

ج-النقطة I هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC.

تمريـــن عـــ11ـــدد:

1) أ)انظر الرسم

ب)لدينا النقطة I منتصف الضّلع [NP]. لذا القطعة [MI] تمثل موسّط المثلث الصّادر من رأس الزّاوية القائمة.

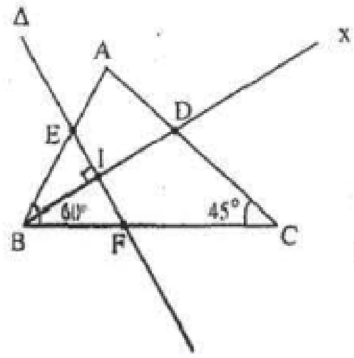


ج)لدينا المثلث MNP قائم الزّاوية في M. لذا مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث MNP هو منتصف الوتر [PN].وبما أن النقطة I منتصف [NP] فإن I هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث MNP.

د)بما أن الدّائرة المحيطة بالمثلث MNP مركزها I فإن IM=IN=IP وهذا ما يعني أن المثلث IMN متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة I.

2- أ- لدينا G نقطة تقاطع موسّطات المثلث MNP. لذا النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث MNP.

ب. لدينا IM=IN (لأن IMN متقايس الضّلعين قمّته الرئيسيّة I) وJM=JN (لأن J منتصف [MN]). لذا النقطتين I و J ينتميان إلى الموسّط العمودي لـ[MN]. وهذا يعني أن المستقيم (IJ) يمثل الموسّط العمودي لـ[MN].



ج. بما أن المستقيم (IJ) هو الموسّط العمودي لـ[MN] فإن المثلث IJN قائم الزّاوية في ونعلم أن المركز القائم لمثلث قائم هو رأس الزّاوية القائمة. إذن المركز القائم للمثلث IJN هو J.

تمريـــن عـــ12ـــدد:

1) أ)انظر الرسم

ب) في المثلث ABC لدينا $B\hat{A}C+A\hat{B}C+B\hat{C}A=180°$ يعني

$$B\hat{A}C=180°-(A\hat{B}C+B\hat{C}A)=180°-(60°+45°)=180°-105°=75°$$

2) أ- بما أن [Bx) منصف الزّاوية $A\hat{B}C$ فإن

في المثلث ABD لدينا $A\hat{B}D+B\hat{D}A+B\hat{A}D=180°$. $A\hat{B}D=\frac{A\hat{B}C}{2}=\frac{60°}{2}=30°$

يعني $B\hat{D}A=180°-(A\hat{B}D+B\hat{A}D)=180°-(30°+75°)=180°-105°=75°$

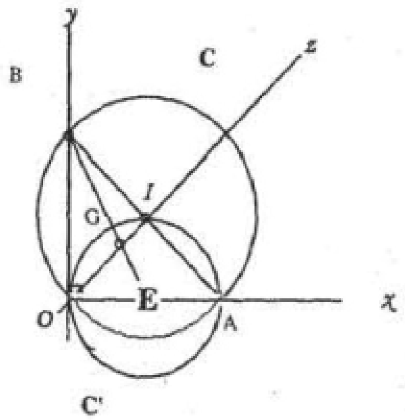
ب. لدينا $B\hat{A}C=B\hat{D}A=75°$. لذا المثلث ABD له زاويتان متقايستان وهذا يعني أنه مثلث متقايس الضلعين قمّته الرئيسيّة B.

3)ب)في المثلث BEJ لدينا $B\hat{E}I+E\hat{I}B+E\hat{B}I=180°$. يعني

$B\hat{E}I=180°-(E\hat{B}I+E\hat{I}B)=180°-(30°+90°)=180°-120°=60°$

ج)في المثلث BEF لدينا $F\hat{B}E=B\hat{E}F=60°$ وهذا يعني أن $B\hat{F}E=60°$ وبالتالي المثلث BEF زواياه متقايسة.
إذن هو متقايس الأضلاع.

د)نعلم أن في مثلث متقايس الأضلاع تنطبق المستقيمات المعتبرة الموافقة لكل ضلع.
وبما أن المثلث BEF متقايس الأضلاع و(BI] هو منصّف الزّاوية $E\hat{B}F$ فإن المستقيم (BI) يمثّل الموسّط العمودي للضلع [EF] ويقطعه في I. إذن النقطة I منتصف [EF].



<u>تمريـن عــ13ــدد:</u>

1) أ)لدينا (OB) ⊥ (OA) و OA=OB. لذا المثلث OAB متقايس الضلعين وقائم الزّاوية في O.

ب)بما أن المثلث OAB متقايس الضلعين وقائم الزّاوية في A فإن زاويتي القاعدة متقايستان ومتتامّتان أي $O\hat{A}B=O\hat{B}A=\frac{90°}{2}=45°$.

ولدينا $B\hat{O}A=90°$.

2) أ)لدينا المثلث OAB متقايس الضلعين قمّته الرئيسيّة O. لذا منصّف الزّاوية $B\hat{O}A$ يحمل الارتفاع والموسّط الصّادرين من القمّة O.وبما أن (OI] منصّف الزّاوية $B\hat{O}A$ فإن القطعة [OI] تمثّل الموسّط الصّادر من O للمثلث OAB وهذا يعني أن النقطة I منتصف [AB].

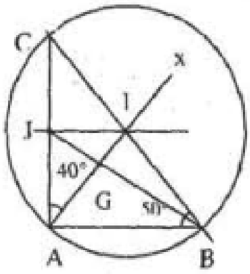
ب)لدينا OAB مثلث قائم الزّاوية في O والنقطة I منتصف الوتر [AB]. لذا I هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث OAB وهذا يعني أن IO=IA.وبما أن [OI] هو الارتفاع الصّادر من O فإن [IA] ⊥ [OI] .إذن المثلث IOA متقايس الضلعين وقائم الزّاوية في I.

3)لدينا G نقطة تقاطع موسّطات المثلث OAB. لذا G تمثّل مركز ثقل المثلث OAB.

4) أ)لدينا المثلث OAB قائم الزّاوية في O. لذا مركز الدّائرة C المحيطة به هو منتصف الوتر[AB] أي النقطة I.
ولدينا المثلث OIA قائم الزّاوية في I. لذا مركز الدّائرة 'C المحيطة به هو منتصف الوتر [OA] أي النقطة K.

ب)الدّائرتين C و 'C متقاطعتان في النقطتين O و A : C∩C'={O;A}.

<u>تمريـن عــ14ــدد:</u> 1) لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A. لذا الزّاويتان الحادّتان في المثلث ABC هما متتامّتان أي $A\hat{B}C+A\hat{C}B=90°$. يعني $A\hat{C}B=90°-A\hat{B}C=90°-50°=40°$. ولدينا $C\hat{A}I=40°$. هذا يعني أن للمثلث IAC زاويتان متقايستان. إذن هو متقايس الضلعين قمّته الرئيسيّة I. ومنه نستنتج أن IA=IC.

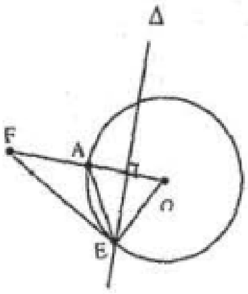


2) لدينا $B\hat{A}I=B\hat{A}C-C\hat{A}I=90°-40°=50°$. لذا المثلث IAB له زاويتان متقايستان ؛ إذن هو متقايس الضلعين قمته الرئيسية I. ومنه نستنتج أن IA=IB.

3) بما أن IA=IC و IA=IB فإن IB=IC ولدينا النّقاط B و I و C على استقامة واحدة. إذن النقطة I هي منتصف [BC].

4) لدينا ABC مثلث قائم الزّاوية في A. لذا مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC هو منتصف الوتر [BC] أي النّقطة I.
هي نقطة تقاطع موسّطات المثلث ABC.

5) لدينا [BJ] موسّط المثلث ABC الصّادر من B. لذا النقطة J تمثل منتصف [AC] وهذا يعني أن JA=JC. ونعلم أن IA=IC. إذن النقطتان I و J لهما نفس البعد عن طرفي القطعة [AC] وهذا يعني أن I و J ينتميان إلى الموسّط العمودي لـ[AC].
إذن (IJ) هو الموسّط العمودي لـ[AC].



تمريـــن عـــ15ـــدد

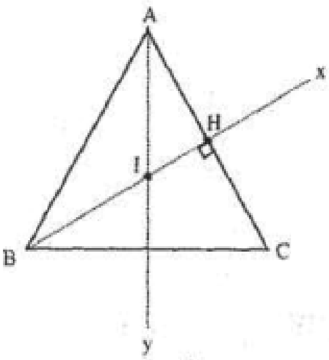
2) لدينا A و E نقطتين من الدائرة C مركزها O. لذا فإن OE=OA والنقطة E تنتمي إلى الموسط العمودي لـ[OA]. لذا فإن AE=OE. وبما أن OE=OA و OE=AE فإن OA=AE=OE. وبالتالي المثلث AEO متقايس الأضلاع.

3) أ) بما أن AF=AO و AO=AE فإن AF=AO=AE.

ب) في المثلث EFO لدينا طول الموسط الصادر من E يساوي نصف طول الضلع [OF]. هذا يعني أن المثلث EFO قائم الزاوية في E.

4) أ) بما أن المثلث EFO قائم الزاوية في E فإن $(FE)\perp(OE)$.

ب) لدينا E نقطة من الدائرة C و (EF) عمودي على (OE) في E. لذا فإن (EF) مماس للدائرة C في E.



تمريـــن عـــ16ـــدد

1- انظر الرسم.

2. أ- انظر الرسم.

ب- نعلم أن في مثلث متقايس الأضلاع تنطبق المستقيمات المعتبرة الموافقة لكل ضلع. وبما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و ([Bx هو منصف الزاوية $A\hat{B}C$ فإن [BH] يمثل الارتفاع الصادر من B .وهذا يعني أن المثلث BHC هو قائم الزاوية في H.

3- أ- انظر الرسم.

ب- لدينا BCH مثلث قائم الزاوية في H. لذا الزاويتان الحادتان $H\hat{C}B$ و $H\hat{B}C$ هما متتامتان أي $H\hat{C}B+H\hat{B}C=90°$ يعني

$H\hat{B}C=90°-H\hat{C}B=90°-60°=30°$ ، $I\hat{B}A=\frac{A\hat{B}C}{2}=\frac{60°}{2}=30°$ ؛ $I\hat{A}B=\frac{B\hat{A}C}{2}=\frac{60°}{2}=30°$

ج) لدينا $I\hat{B}A=I\hat{A}B=30°$. هذا يعني أن المثلث IAB له زاويتان متقايستان. لذا فهو متقايس الضلعين قمته الرئيسيةُ I.

د- لدينا I هي نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث ABC. لذا فإن I تمثل مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC.