

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4h

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4.
- 2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.
- 3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.
- 4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$.
- 5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.
- 6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, $[AB]$ et $[IJ]$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle (\mathcal{C}) , M est un point variable du cercle (\mathcal{C}) tel que $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $MBEN$ et $MKFA$ sont des carrés de sens direct.

- 1) Montrer que les points E , F et M sont alignés.
- 2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B .
 - a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I .
 - b) Déterminer $r_1 \circ r_2 (E)$. En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.
- 3) Soit S la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
 - a) Déterminer $S(M)$.
 - b) Construire le point G image de F par S .
 - c) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.
 - d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P . Construire P .

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à \mathbb{R} .

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln x + x$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \ln x.$$

\mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

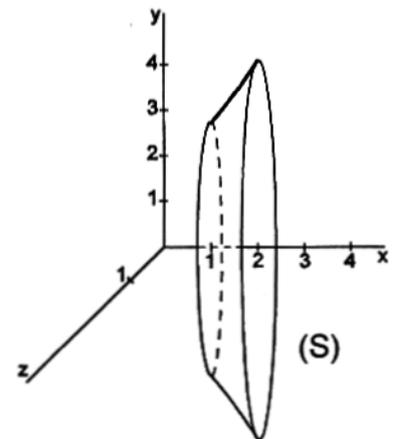
b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

- 3) On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Etudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_h .
 - Montrer que la courbe \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.
 - Placer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.
 - Tracer \mathcal{C}_f .
- 4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, on désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan $S(t)$ limitée par les courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h et la droite d'équation $x = t$.
- Montrer que pour tout réel $t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, $\mathcal{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.
 - Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.
 - Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$.
Hachurer $S(t_1)$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox) .
Le but de cet exercice est de calculer le volume \mathcal{V} de ce solide.



- Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.
Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.
- Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.
 - Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.
 - En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.
- Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.
 - Calculer alors \mathcal{V} .

figure (1)

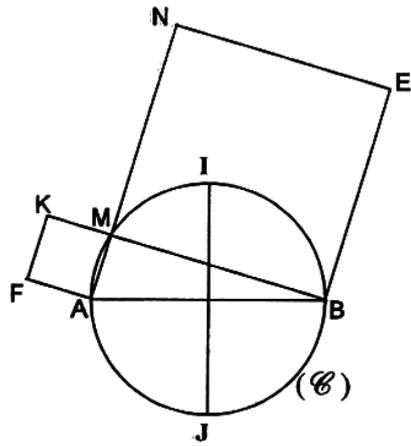


figure (2)

