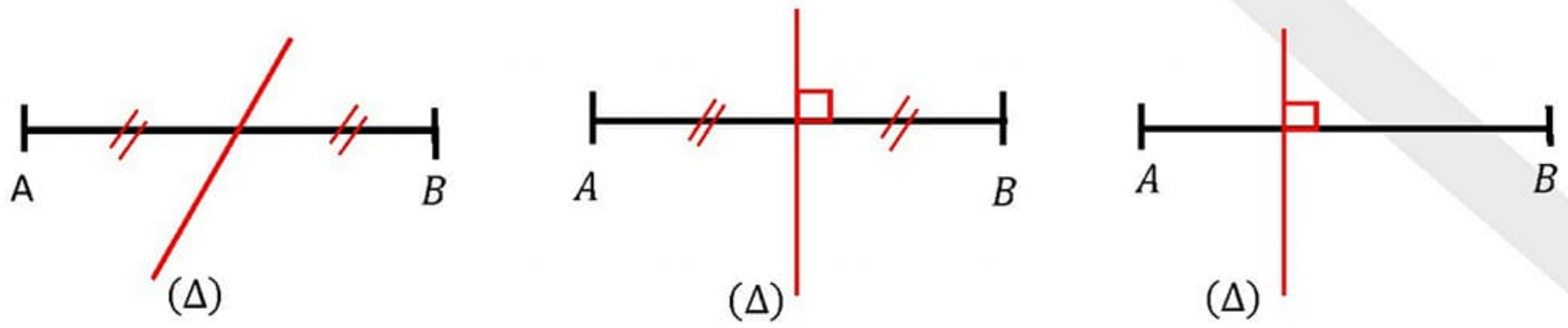
الدرس الثالث :

التناظر المحوري

ديسمبر 2021

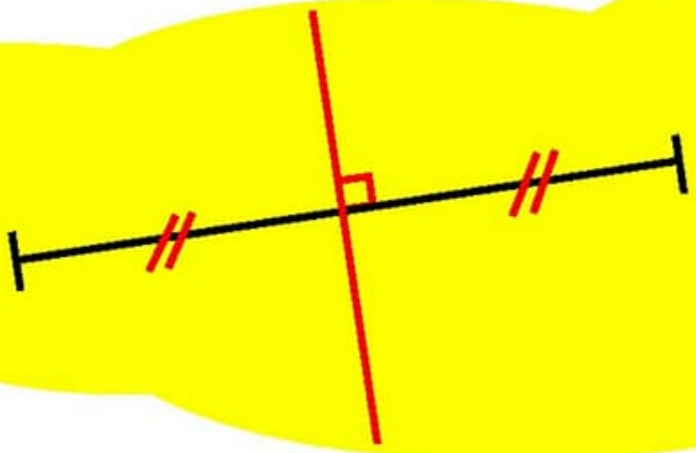
تمرين

في أي حالة من الحالات التالية المستقيم (Δ) يمثل الموسط العمودي لقطعة المستقيم $[AB]$



(3) (2) (1)

في الحالة (2) (Δ) هوالموسط العمودي لقطعة المستقيم $[AB]$ لأنه يعامدها ويمرمن منتصفها



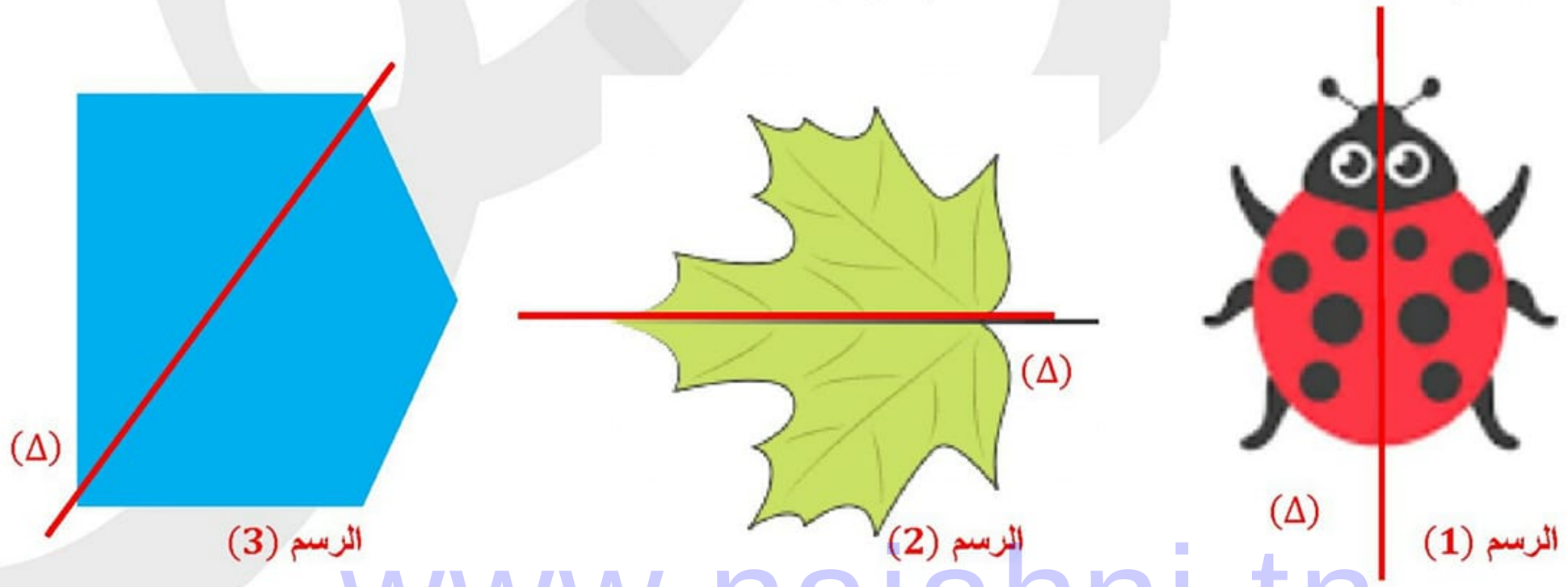
الموسط العمودي لقطعة مستقيم هو المستقيم العمودي على القطعة في المنتصف

الموسط العمودي لقطعة مستقيم هو مجموعة النقاط المتساوية البعد عن طرفي القطعة

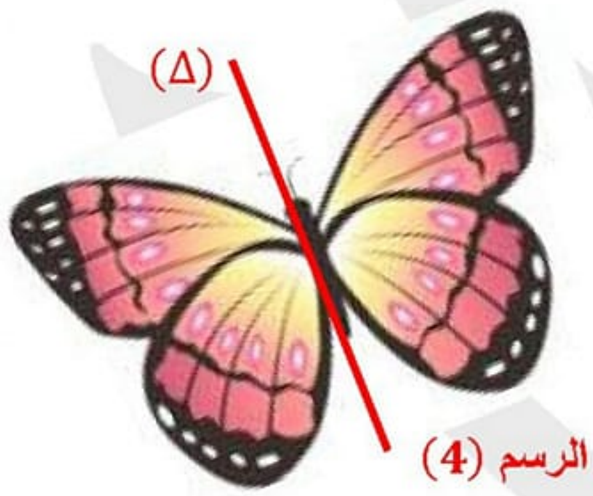
I. التناظر المحوري

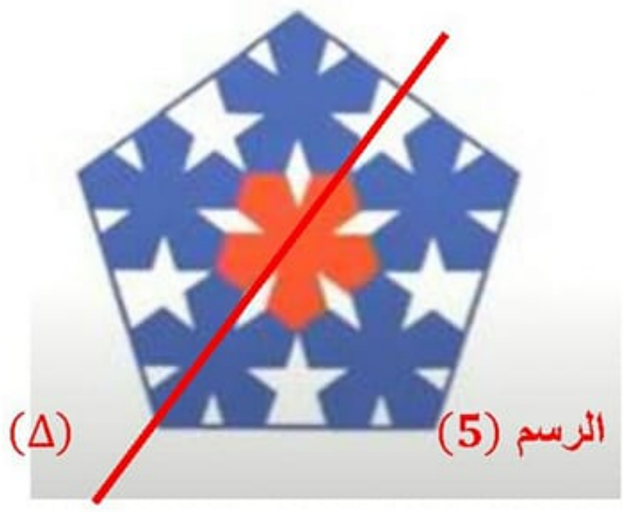
نشاط تمهيدي

تأمل الرسوم التالية ماذ تلاحظ بالنسبة للمستقيم (Δ) ؟



www.najahni.tn





نلاحظ في كل من الرسوم (1) و(2) و (4) و (5) أن المستقيم يقسم الشكل إلى جزئين قابلين للتطابق

أي عند الطي وفق (Δ) نتحصل على جزئين متطابقبن

فنقول أن المسقيم (Δ) هو محور تناظرللشكل

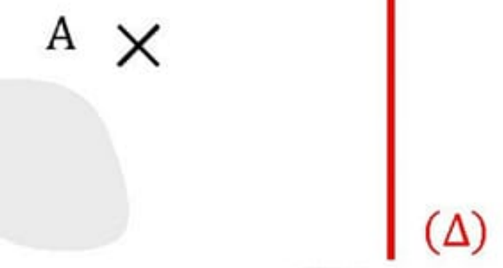
في الرسم (3) المسقيم (Δ) لا يمثل محور تناظر

تعريف

محور التناظر هو مستقيم يقسم الرسم إلى جزئين قابلين للتطابق

مناظرة نقطة بالنسبة إلى مستقيم

نشاط



1) أ ـ على ورقة شفيفة أرسم مستقيما (Δ) و عين نقطة A خارجه

ب ـ اطو الورقة وفق المسستقيم (Δ) ثم عين النقطة B التي تنطبق على النقطة A

ج ـ ارسم قطعة المستقيم $[AB]$ ثم تحقق من أن(Δ) هو الموسط العمودي لـ $[AB]$

2) أ ـ على ورقة شفيفة أرسم قطعة مستقيم $[MN]$ و ابن (Δ') موسطها العمودي

ب ـ اطو الورقة وفق المسستقيم (Δ') ماذا تلاحظ بالنسبة للنقطتين M و N ؟

ج ـ لتكن E نقطة من (Δ') ماهي مناظرتها بالنسبة إلى المستقيم (Δ')

بما أن النقطتان A و B قابلتان للتطابق عند الطي وفق(Δ) نقول أنهما متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

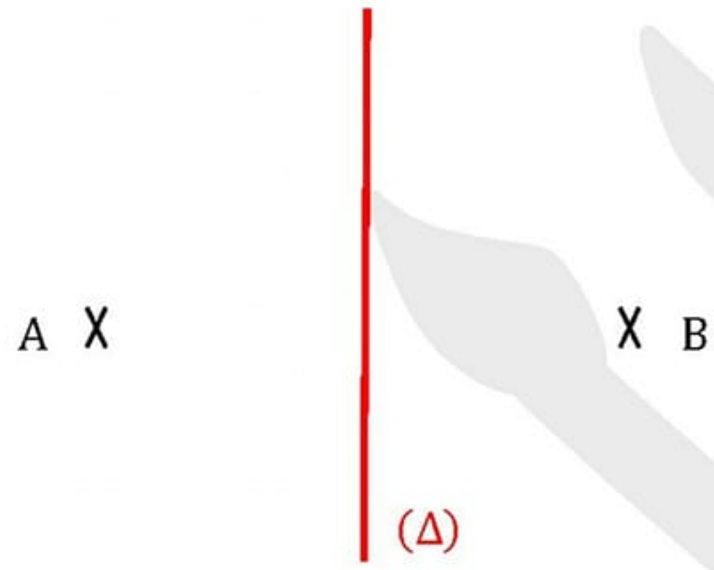
كلا منهما تسمى مناظرة للأخرى

المستقيم (Δ) يسمى محور التناظر

التناظر بالنسبة إلى مستقيم تسمى التناظر المحوري

www.najahni.tn

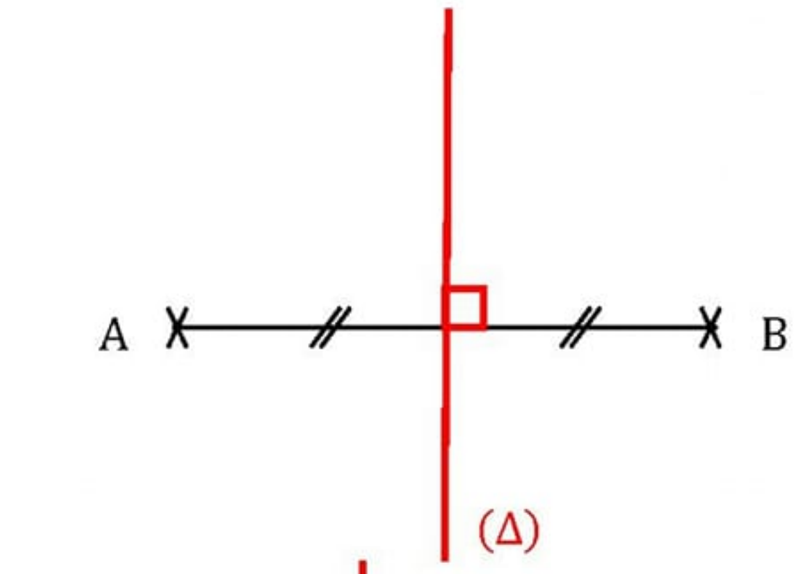
1)

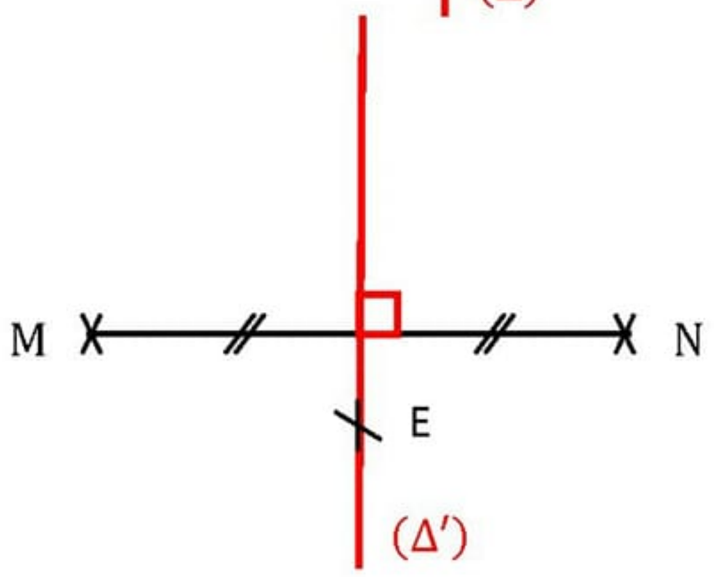


ج ـ نتحقق أن (Δ) يعامد $[AB]$

و بعد A عن(Δ) يساوي بعد B عن (Δ)

و بالتالي (Δ) الموسط العمودي لـ $[AB]$





2) نلاحظ أن النقطتين M و N تنطبقان عند الطي وفق (Δ')

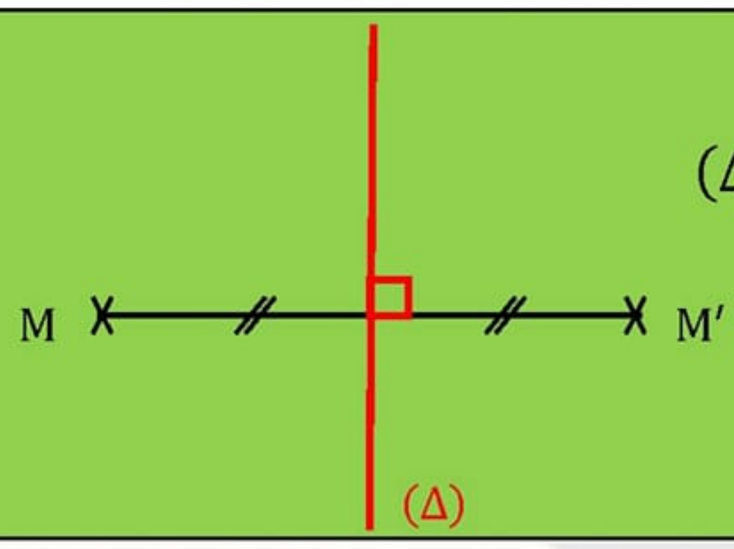
إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (Δ')

ج ـ مناظرة E بالنسبة إلى المستقيم (Δ') هي نفسها E

عموما

- نقطتان M و M' تكونان متناظرتان بالنسبة إلى مستقيم (Δ)

إذا كان (Δ) الموسط العمودي لـ $[MM']$

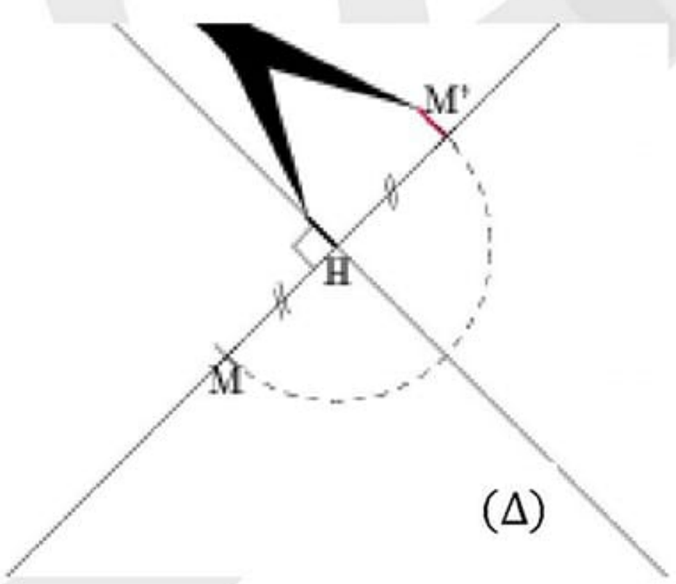


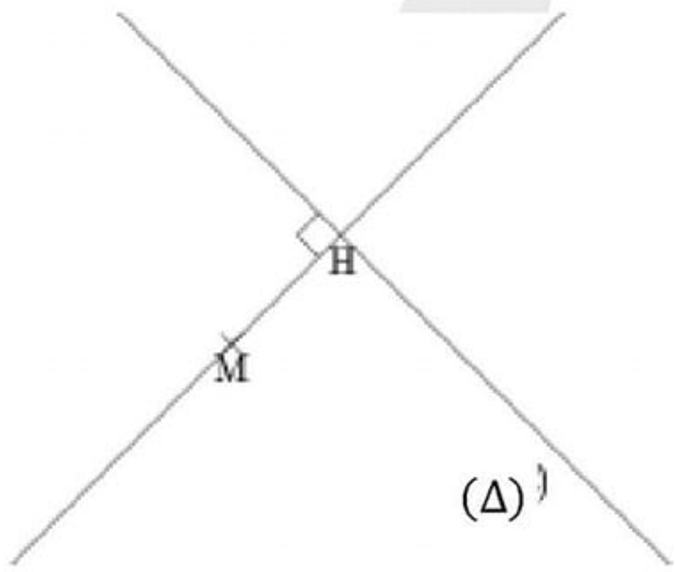
- المستقيم (Δ) يسمى محور التناظر
- كل نقطة من محور التناظر هي مناظرة لنفسها

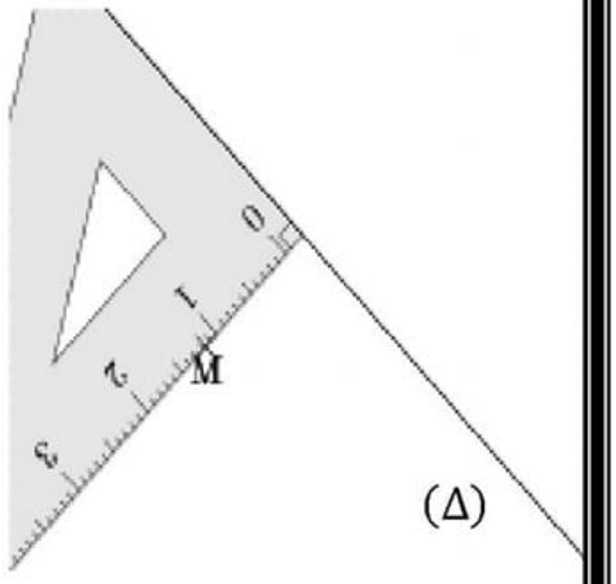
بناء مناظرة نقطة بالنسبة إلى مستقيم

لبناء مناظرة نقطة بتناظر محوري نتبع المراحل التالية : (باستعمال الكوس و البركار

أو باستعمال المسطرة و البركار)

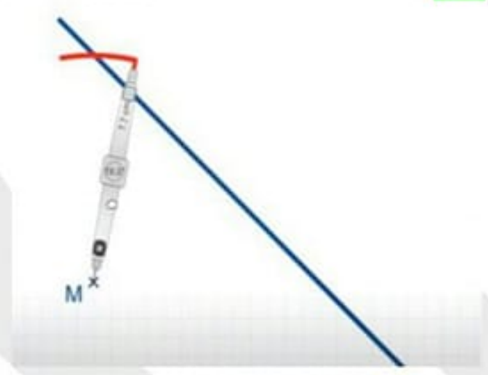




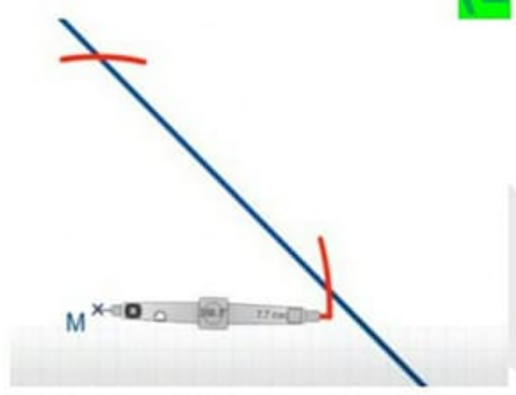


www.najahni.tn

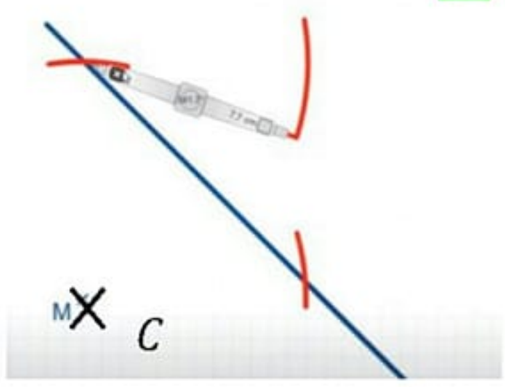
(1



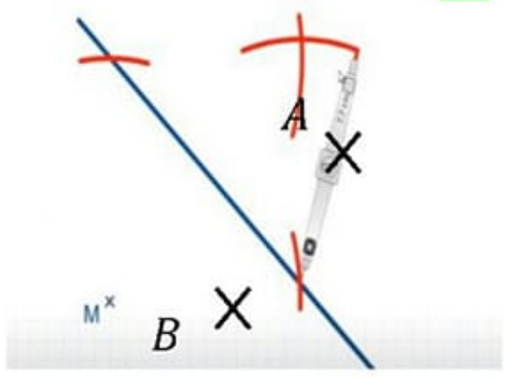
(2



(3



(4



تمرين

لتكن A و B و C نقاط ليست على نفس الإستقامة

ابن A' مناظرة A بالنسبة إلى (Δ) إذا علمت أن :

أ) النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)

ب) النقطتين B و C لم تتغيرا بالتناظر بالنسبة إلى (Δ)

الإصلاح

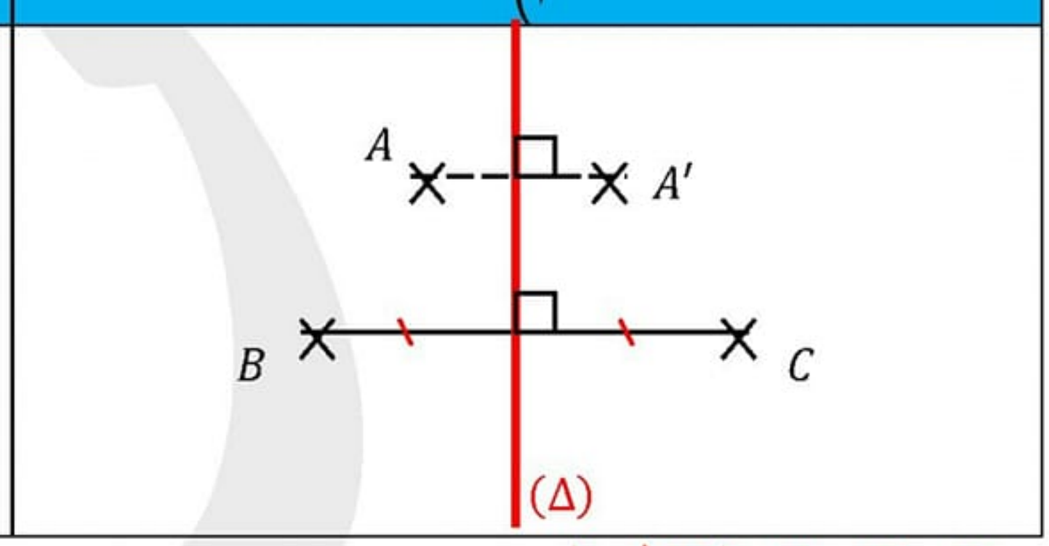
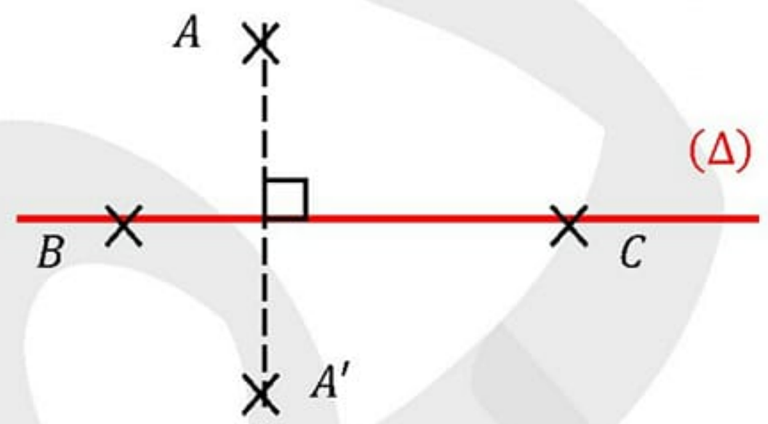
أ) بما أن B و C متناظرتان بالنسبة إلى (Δ) فإن (Δ) الموسط العمودي $[BC]$

وبالتالي نبدأ ببناء (Δ) الموسط العمودي $[BC]$ ثم نبني A' مناظرة A بالنسبة إلى (Δ)

ب) بما أن النقطتين B و C لم تتغيرا بالتناظر بالنسبة إلى (Δ) أي أن مناظرة BهيB ومناظرة C هي C

و بالتالي B و C نقطتين من (Δ) ومنه (Δ) هو(BC)

إذن نبني A' مناظرة A بالنسبة إلى (BC)

أ)	ب)
	

II. خاصيات التناظر المحوري

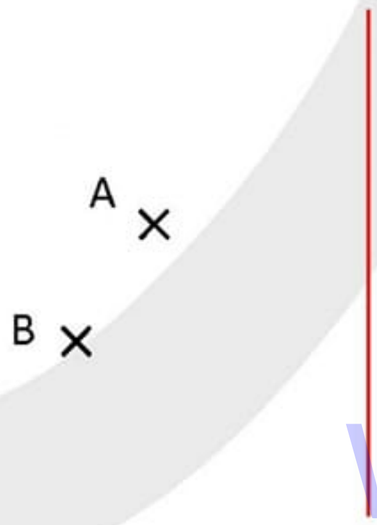
1) مناظرة قطعة مستقيم ـ مناظر مستقيم ـ مناظر نصف مستقيم

نشاط

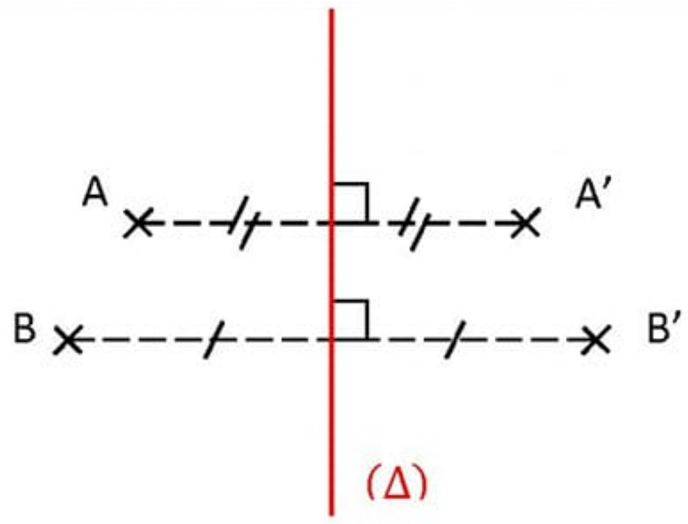
ليكن (Δ) مستقيم وA و B نقطتين خارجه

1) ابن A' و B' مناظرتي وA و B على التوالي بالنسبة إلى(Δ)

2) انقل الرسم على 3 أوراق شفافة



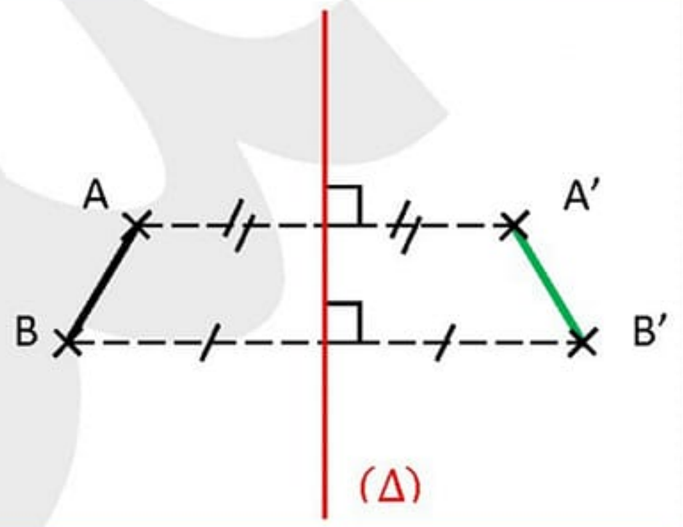
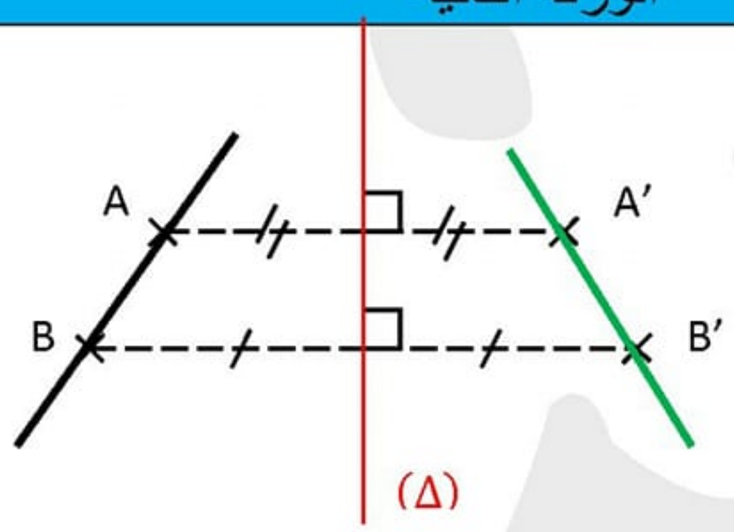
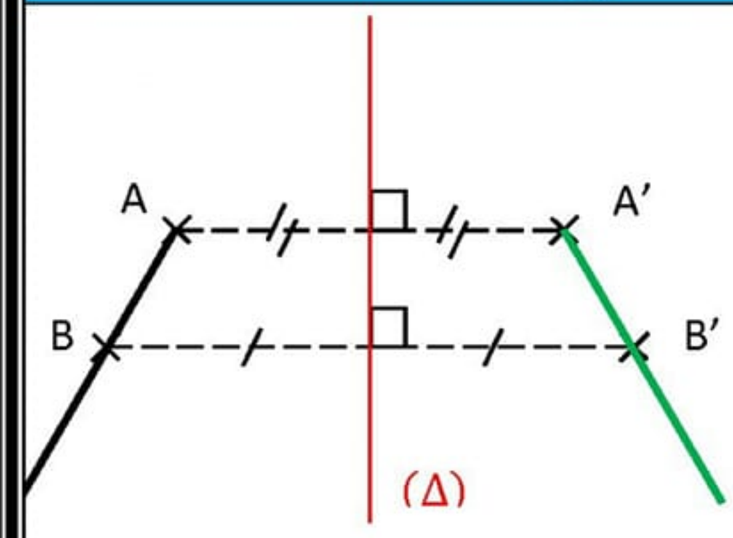
www.najahni.tn



أ- على الأولى ارسم القطعتين $[AB]$ و$[A'B']$ تحقق باستعمال الطي (طي الورقة وفق (Δ)) أن $[AB]$ و$[A'B']$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)

ب - على الثانية ارسم المستقيمين (AB) و$(A'B')$ تحقق باستعمال الطي (طي الورقة وفق (Δ)) أن (AB) و$(A'B')$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)

ج - على الثالثة ارسم نصفي المستقيمين $[AB]$ و$[A'B']$ تحقق باستعمال الطي (طي الورقة وفق (Δ)) أن $[AB]$ و$[A'B']$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)

الورقة الأولى	الورقة الثانية	الورقة الثالثة
		
$[AB]$ و$[A'B']$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)	(AB) و$(A'B')$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)	$[AB)$ و$[A'B')$ متناظران بالنسبة إلى (Δ)

عموما

مناظرة قطعة مستقيم بالتناظر المحوري هي قطعة مستقيم

مناظر مستقيم بالتناظر المحوري هو مستقيم

مناظرنصف مستقيم بالتناظر المحوري هو نصف مستقيم

ملاحظة

- لنتحصل على مناظرة قطعة مستقيم يكفي أن نتحصل على مناظرتي طرفيها
- لنتحصل على مناظر مستقيم يكفي أن نتحصل على مناظرتي أي نقطتين منه
- لنتحصل على مناظر مستقيم يكفي أن نتحصل على مناظرتي نقطتين منه : طرفه و أي نقطة أخرى منه

www.najahni.tn

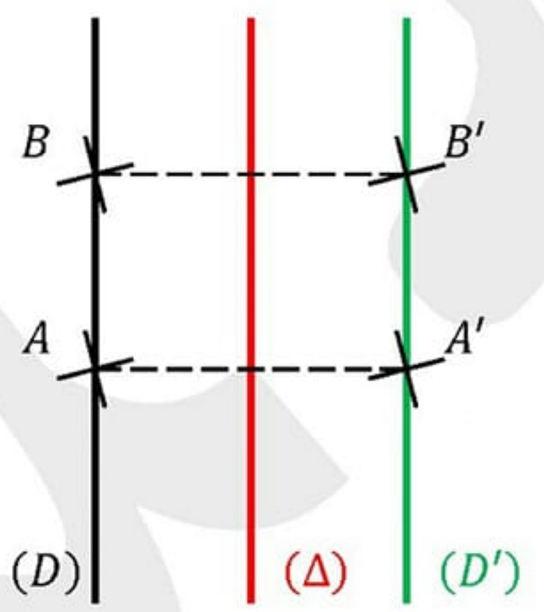
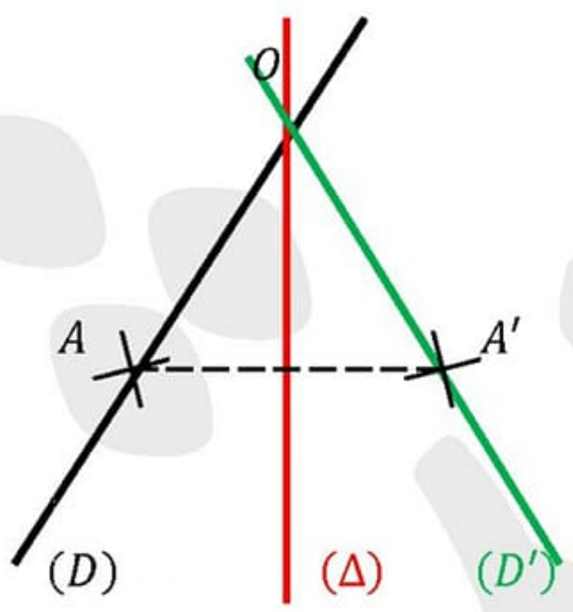
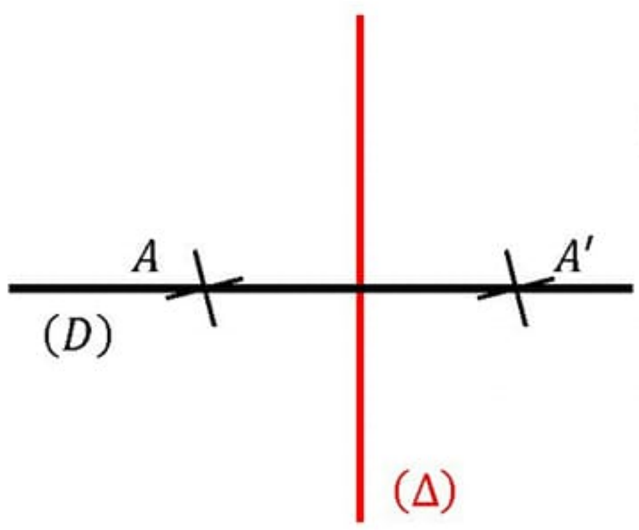
تمرين تطبيقي

ليكن (D) و (Δ) مستقيمان

ابن المستقيم (D') مناظر (D) بالنسبة إلى (Δ) في الحالات التالية

أ) (D) و (Δ) منفصلان ب) (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة O و غير متعامدين

ج) (D) و (Δ) متعامدان د) (D) و (Δ) متطابقان

أ)	ب)	ج)	د)
			
(D) و (Δ) و (D') متوازية	(D) و (Δ) و (D') تتقاطع في نفس النقطة	مناظرة كل نقطة من (D) هي نقطة من (D) و بالتالي (D) مناظر لنفسه	مناظرة كل نقطة من (D) هي نفسها و بالتالي (D) مناظر لنفسه

تطبيقات : المحافظة على البعد ـ المحافظة على الإستقامة ـ المحافظة على المنتصف

1) المحافظة على البعد

بما أن A' و B' مناظرتي A و B على التوالي بالنسبة إلى (Δ) فإن $[AB]$ و$[A'B']$ متناظران بالنسبة إلى (Δ) و بالتالي $[AB]$ و$[A'B']$ قابلتان للتطابق عند الطي وفق (Δ) ومنه نستنتج أنهما متقايستان أي $AB = A'B'$

و نقول أن : **التناظر المحوري يحافظ على البعد**

التناظر المحوري يحاظ على البعد

أي : إذا كانت A' مناظرة A

و B' مناظرة B

فإن $AB = A'B'$

www.najahni.tn

ونستنتج أن

مناظرة قطعة مستقيم بالتناظر المحوري هي قطعة مستقيم مقايسة لها

2) المحافظة على الإستقامة

بما أن A' و B' مناظرتي A و B على التوالي بالنسبة إلى(Δ) فإن(AB) و$(A'B')$ متناظران بالنسبة إلى (Δ) أي أن مناظرة كل نقطة من المستقيم (AB) هي نقطة من المستقيم $(A'B')$

ومنه نستنتج أن مناظرات نقاط على نفس الإستقامة تكون نقاط على نفس الإستقامة

ونقول أن : **التناظر المحوري يحافظ على الإستقامة**

التناظر المحوري يحاظ على الإستقامة

أي : إذا كانت A و B و C على نفس الإستقامة

A' مناظرة A

و B' مناظرة B

و C' مناظرة C

فإن النقاط A' و B' و C' تكون على نفس الإستقامة

3) المحافظة على المنتصف

نشاط

لتكن $[AB]$ قطعة مستقيم منتصفها I و A' و B' و I' مناظرات لـ A وB و I على التوالي بالنسبة إلى مستقيم (Δ)

1) بين أن النقاط A' و B' و I' على نفس الإستقامة

2) لتبين أن $A'I' = B'I'$ أكمل بما يناسب

بما أن A' مناظرة ....

و I' مناظرة....

ونعلم أن التناظر المحوري يحافظ .....

فإن $A'I' = \cdots$ 1

بما أن B' مناظرة ....

و I' مناظرة....

ونعلم أن التناظر المحوري يحافظ .....

فإن $B'I' = \cdots$ 2

www.najahni.tn

و بما أن I ..... $[AB]$ فإن $AI = \cdots$. (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن .... = ...

3) استنتج أن I' منتصف $[A'B']$

الإصلاح

1) بما أن

النقاط A و B و I على نفس الإستقامة (لأن I منتصف $[AB]$)

A' مناظرة A

و I' مناظرة I

و B' مناظرة B

و نعلم أن التناظر المحوري يحافظ على الإستقامة

فإن النقاط A' و I' و B' تكون على نفس الإستقامة

2) لتبين أن $A'I' = B'I'$ أكمل بما يناسب

بما أن A' مناظرة A

و I' مناظرة I

ونعلم أن التناظر المحوري يحافظ على البعد

فإن $A'I' = AI$ (1)

بما أن B' مناظرة B

و I' مناظرة I

ونعلم أن التناظر المحوري يحافظ على البعد

فإن $B'I' = BI$ (2)

و بما أن I منتصف $[AB]$ فإن $AI = BI$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A'I' = B'I'$

3) لدينا النقاط A' و B' و I' على نفس الإستقامة (سؤال 1)

و $A'I' = B'I'$ (سؤال 2)

يعني أن I' منتصف $[A'B']$

www.najahni.tn

ونقول أن : **التناظر المحوري يحافظ على المنتصف**

التناظر المحوري يحاظ على المنتصف

أي : إذا كانت I منتصف $[AB]$

A' مناظرة A

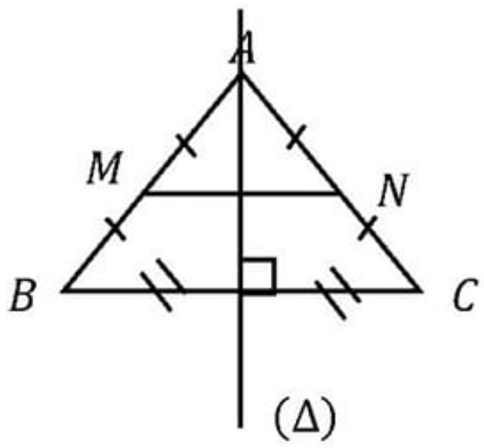
و I' مناظرة I

و B' مناظرة B

فإن I' منتصف $[A'B']$

تمرين تطبيقي

ليكن ABC مثلثا متقايس الظلعين في A و (Δ) الموسط العمودي لقطعة المستقيم $[BC]$ و M و N منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي



1) بين أن (Δ)عمودي على (MN)

2) استنتج أن (MN) موازٍ لـ (BC)

الإصلاح

1) بما أن ABC مثلثا متقايس الظلعين في A فإن $AB = AC$ و بالتالي A من الموسط العمودي لـ $[BC]$

لدينا

مناظرة A بالنسبة إلى (Δ) هي A (لأن A نقطة من (Δ)

و مناظرة B بالنسبة إلى (Δ) هي C (لأن (Δ) الموسط العمودي $[BC]$)

و M منتصف $[AB]$ (معطى)

و نعلم أن التناظر المحوري يحافظ على المنتصف

فإن مناظرة M تكون منتصف $[AC]$ و لنا N هي منتصف $[AC]$ (معطى)

فإن مناظرة M بالنسبة إلى (Δ) هي N وبالتالي (Δ) الموسط العمودي لـ $[MN]$

ومنه (Δ) عمودي على(MN)

2) لدينا : (Δ) عمودي على (MN)

و (Δ) عمودي على (BC)

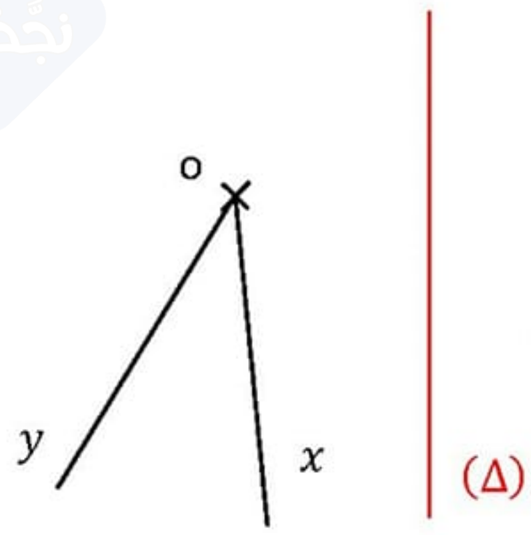
إذن (MN) موازٍ لـ (BC)

www.najahni.tn

2) مناظرة زاوية

نشاط

ليكن (Δ) مستقيم و $x\hat{o}y$ زاوية

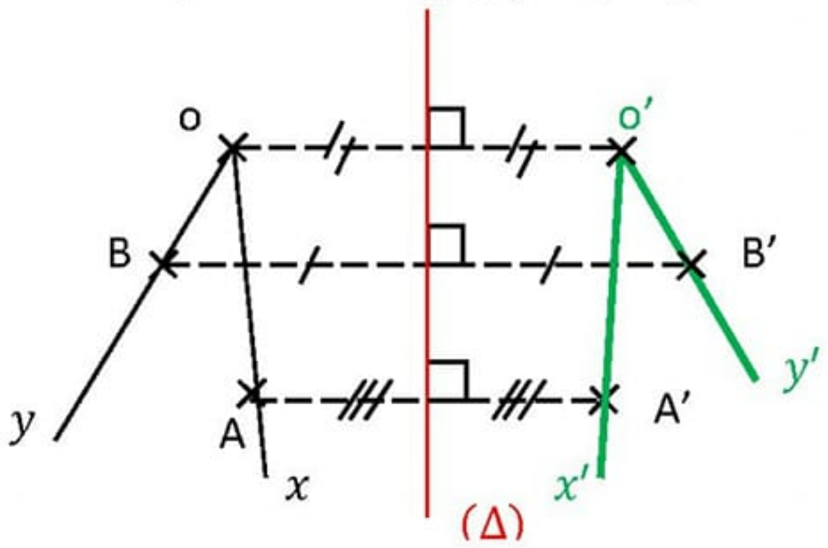


1) ابن نصفي المستقيمين $[o'x']$ و $[o'y']$ مناظري نصفي المستقيمين $[ox)$ و $[oy)$ على التوالي بالنسبة إلى (Δ)

2) انقل الرسم على ورقة شفيفة

3) تحقق باستعمال الطي وفق (Δ) أن الزاويتين

$x\hat{o}y$ و $x'\widehat{o'}y'$ متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)



بما أن الزاويتين $x\hat{o}y$ و $x'\widehat{o'}y'$ تتطابقان عند الطي وفق (Δ)

فهما متناظرتان بالنسبة إلى (Δ) وأيضا هما متقايستان أي أن $x'\widehat{o'}y' = x\hat{o}y$

ونقول أن : **التناظر المحوري يحافظ على المنتصف**

عموما

مناظرة زاوية بالتناظر المحوري هي زاوية مقايسة لها

ملاحظة

لمعرفة مناظرة زاوية بالتناظر المحوري يكفي معرفة مناظري ضلعيها

- أي إذا كان : $[o'x']$ مناظر لـ $[ox)$ و $[o'y']$ مناظر لـ $[oy)$ فإن الزاوية $x'\widehat{o'}y'$ مناظرة للزاوية $x\hat{o}y$ و $x'\widehat{o'}y' = x\hat{o}y$
- إذا كان : A' مناظرة A و O' مناظرة O و B' مناظرة B فإن الزاوية $A'\widehat{O'}B'$ مناظرة للزاوية $A\hat{O}B$ و $A'\widehat{O'}B' = A\hat{O}B$

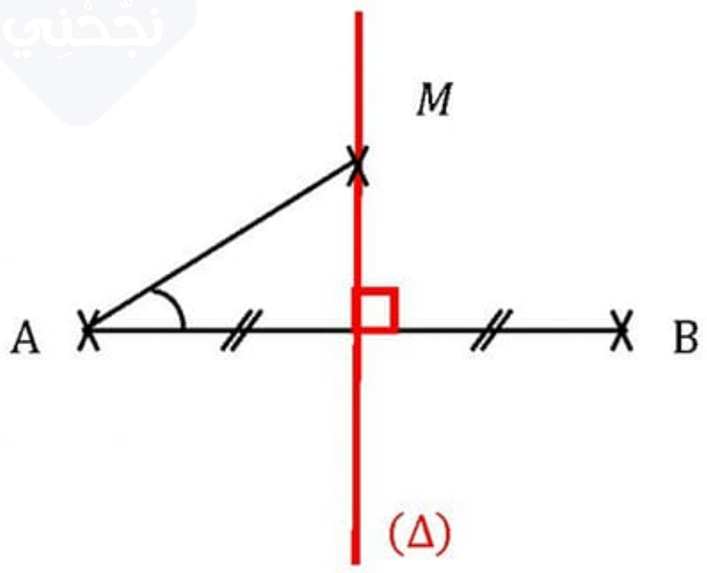
تمرين تطبيقي

في الرسم التالي $[AB]$ و (Δ) موسطها العمودي و M نقطة من (Δ) حيث $AM = 4cm$

و $M\hat{A}B = 40°$

1) ماهي مناظرات كل من النقاط A و B و M بالنسبة إلى (Δ)

www.najahni.tn



2) أحسب BM

3) أحسب $M\hat{B}A$

الإصلاح

1) بما أن M نقطة من (Δ) محو التناظر فإن مناظرة M هي نفسها M

وبما أن (Δ) الموسط العمودي لـ $[AB]$ فإن A و B متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)

أي أن مناظرة A هي B و مناظرة B هي A

2) بما أن B مناظرة A

و M مناظرة M

و نعلم أن التناظر المحوري يحافظ على البعد

فإن $BM = AM$

و لنا $AM = 4cm$ (معطى) فإن $BM = 4cm$

3) بما أن M مناظرة M

و A مناظرة B

و B مناظرة A

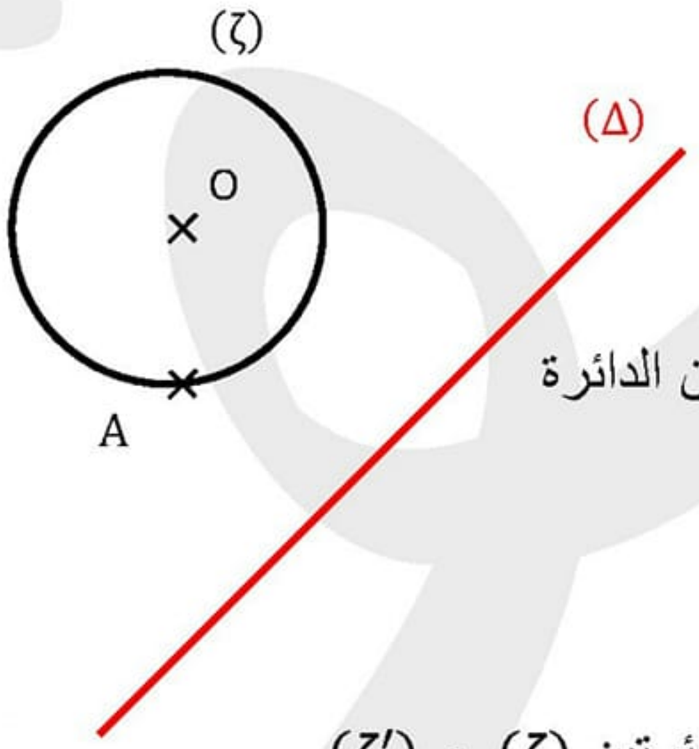
فإن مناظرة الزاوية $M\hat{A}B$ هي الزاوية $M\hat{B}A$

و نعلم أن التناظر المحوري يحافظ على أقيسة الزوايا إذن $M\hat{B}A = M\hat{A}B$

و لنا $M\hat{A}B = 40°$ (معطى) فإن $M\hat{B}A = 40°$

3) مناظرة دائرة

نشاط



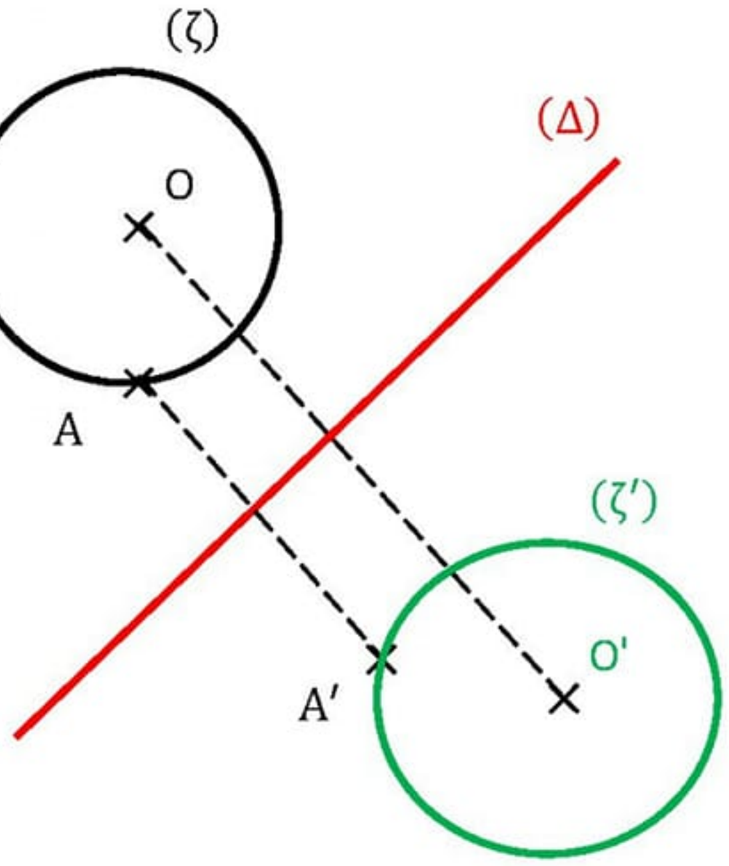
لتكن (ζ) دائرة مركزها O و شعاعها 3cm و (Δ) مستقيم و A نقطة من الدائرة

1) ابن O' و A' مناظرتي O و A على التوالي بالنسبة إلى (Δ)

2) ابن الدائرة (ζ') التي مركزها O' و شعاعها 3cm

3) انقل الرسم على ورقة شفيفة ثم تحقق باستعمال الطي وفق (Δ) أن الدائرتين (ζ) و (ζ') متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)

www.najahni.tn



4) بين أن $O'A' = 3\text{cm}$ ثم استنتج أن A' نقطة من الدائرة (ζ')

بما أن (ζ) و (ζ') تنطبقان عند الطي وفق (Δ)

فهما متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)

$O'A' = 3\text{cm}$ ؟

بما أن A' مناظرة A

و O' مناظرة O

ونعلم أن التناظر المحوري يحافظ على البعد

فإن $O'A' = OA$

و لنا A نقطة من الدائرة (ζ) مركزها O و شعاعها 3cm إذن $OA = 3\text{cm}$ وبالتالي $O'A' = 3\text{cm}$

بما أن $O'A' = 3\text{cm}$ و الدائرة (ζ') مركزها O' و شعاعها 3cm فإن A' نقطة من الدائرة (ζ')

الدائرتين (ζ) و (ζ') متقايستان (لهما نفس الشعاع) و مراكزهما O و O' متناظرتان

عموما

مناظرة دائرة بالتناظر المحوري هي دائرة مقايسة لها

ملاحظة

لمعرفة مناظرة دائرة بالتناظر المحوري يكفي معرفة مناظرة مركزها

تمرين تطبيقي

لتكن (ζ) دائرة مركزها O و (Δ) مستقيم ابن الدائرة (ζ') مناظرة الدائرة (ζ) بالنسبة إلى (Δ)

في الحالات التالية

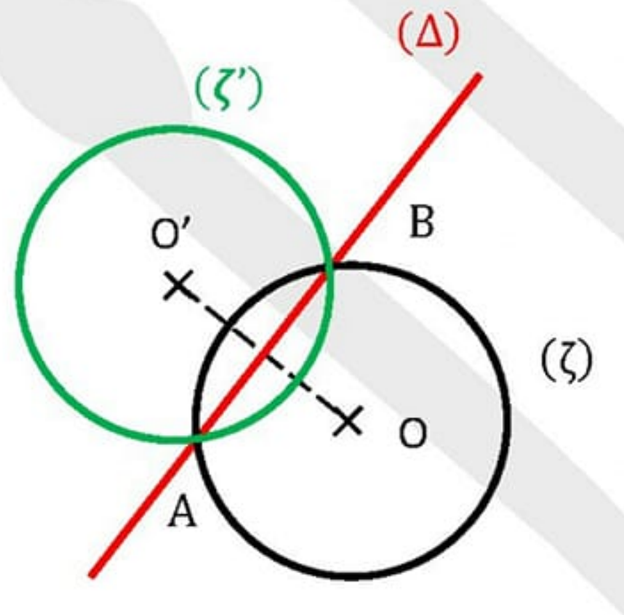
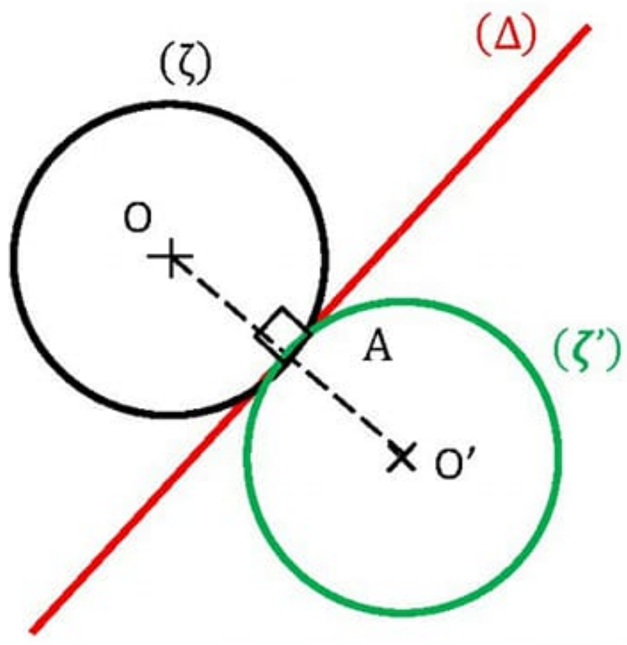
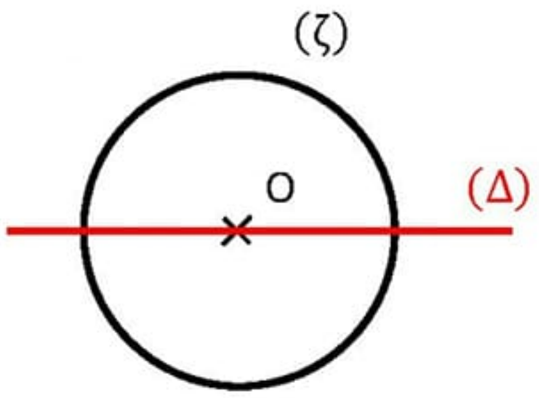
أ - (ζ) و (Δ) يتقاطعان في نقطتين A و B

ب - (ζ) و (Δ) يتماسان في نقطة A

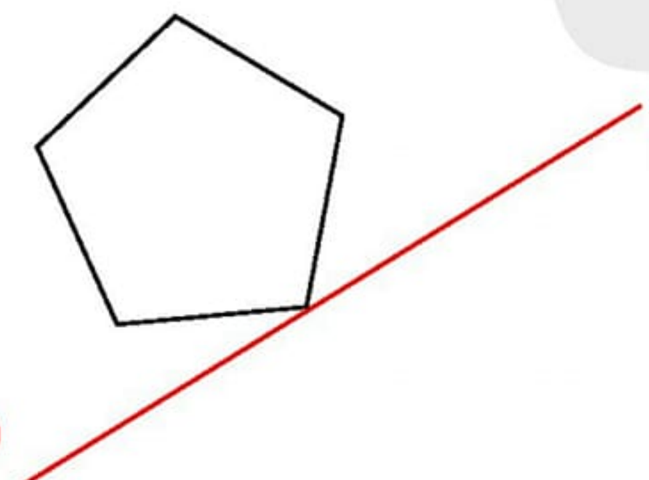
ج - (Δ) مستقم يمر من O

الإصلاح

www.najahni.tn

أ)	ب)	ج)
		
(ζ) و (ζ') تتقاطعان في A و B	(ζ) و (ζ') تتماسان في A	(ζ) مناظرة لنفسها

III. مناظر شكل بالتناظر المحوري

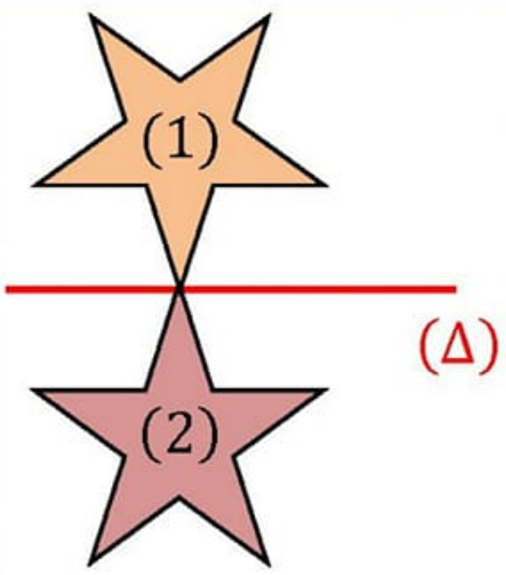
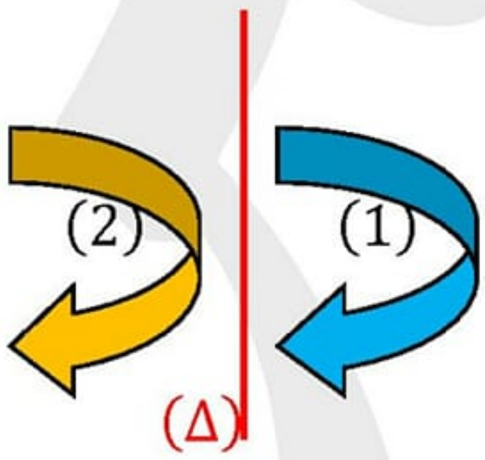
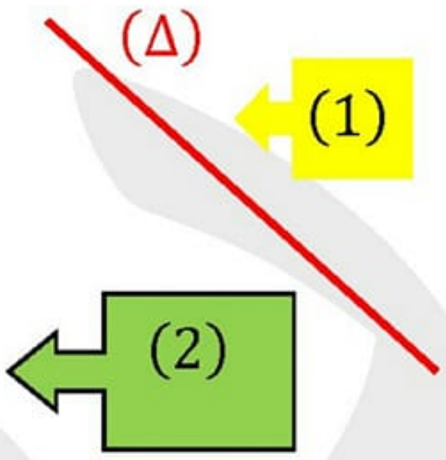
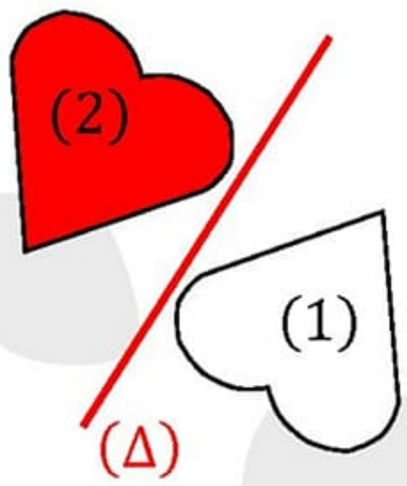


نشاط

أرسم مناظر المضلع بالنسبة إلى (D)

تمرين

جب بصواب أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية الشكلين (1) و (2) متناظرين بالنسبة إلى (Δ)

الحالة (أ)	الحالة (ب)	الحالة (ج)	الحالة (د)
			
.....	.....	.....	.....

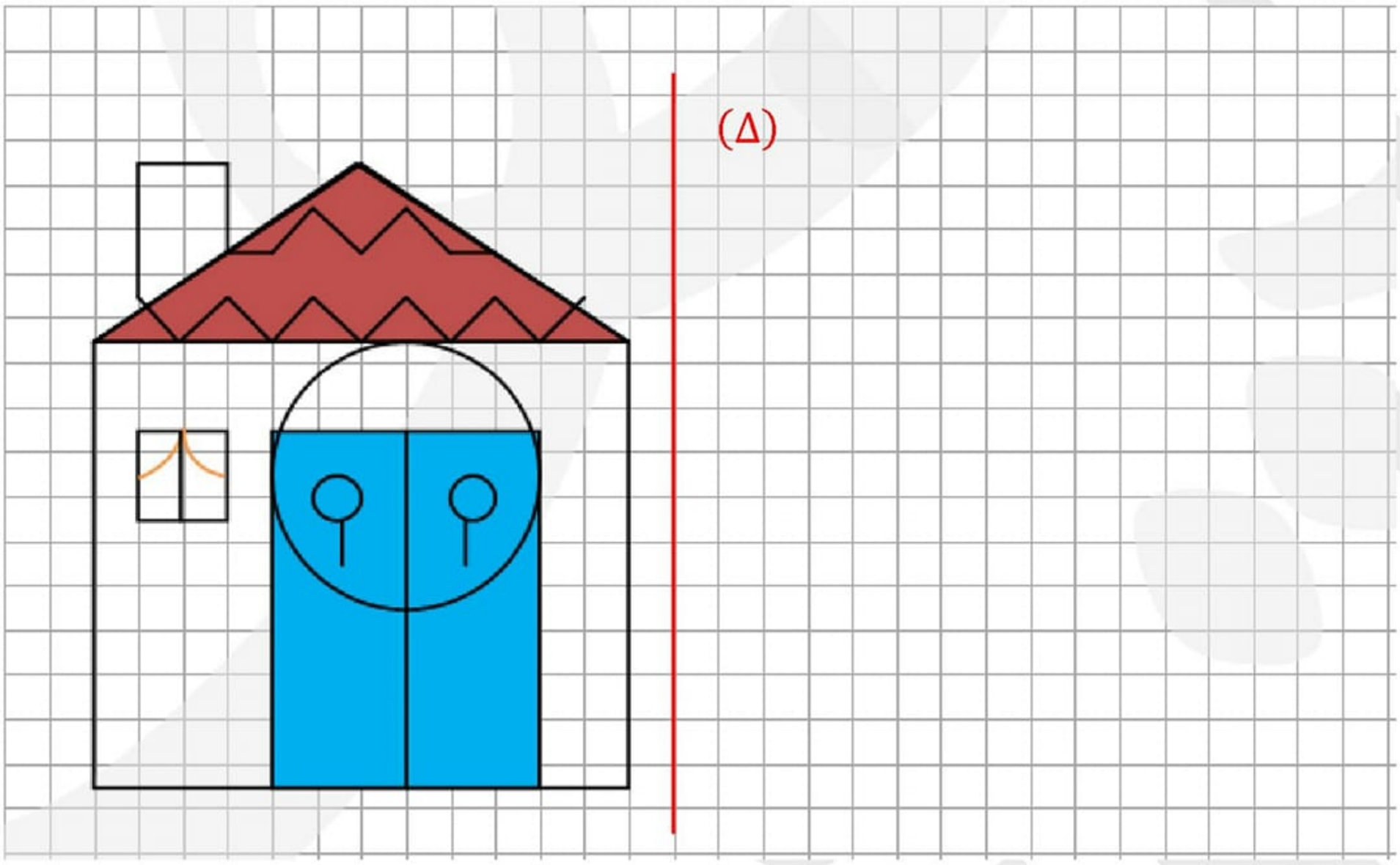
ملاحظة

بما أن التناظ المحوري يحافظ على البعد فإن التناظر المحوري يحافظ على أقيسة المحيطات و أقيسة المساحات

تمرين

أكمل مناظر الرسم التالي بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

www.najahni.tn

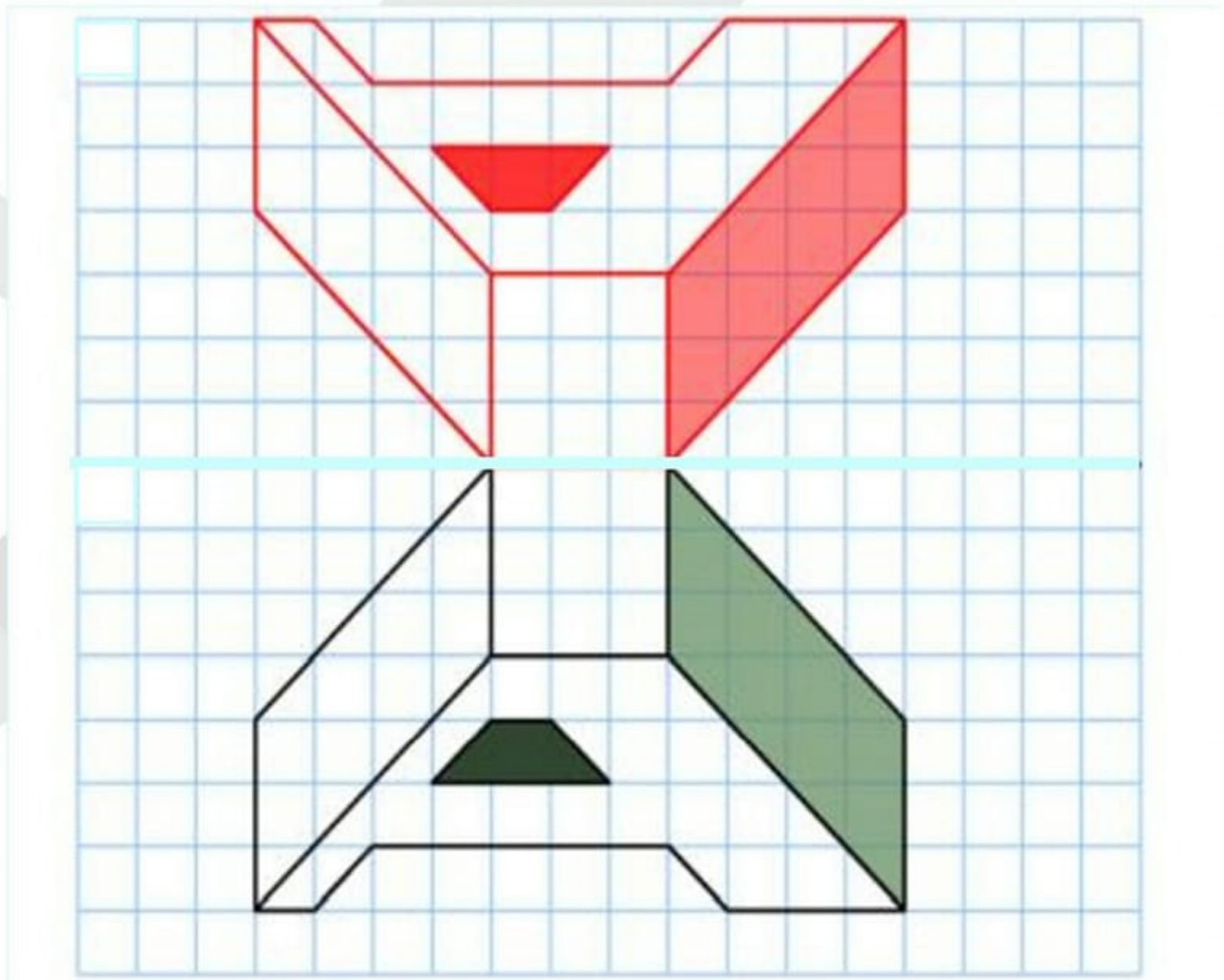


ملاحظة

نقول أن مستقيم (Δ) هو محور تناظر لشكل $(\mathcal{F})$ إذا كان مناظر $(\mathcal{F})$ بالنسبة إلى (Δ) هو $(\mathcal{F})$ نفسه

تمرين

أرسم محور تناظر أو محور تناظر الرسم التالي



www.najahni.tn