القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين

تعريف:

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين هو أكبر قاسم مشترك لهما

مثال: إذا أخذنا العددين 72 و 48 فإننا نبحث عن مجموعة قواسم كلّ من العددين ثم نأخذ مجموعة القواسم المشتركة لهما وأكبر عنصر في هذه المجموعة يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ 72 و 48 ونرمز له بـ ق.م.أ(72 ، 48)

نقوم بتفكيك العددين إلى جذاء عواملهم الأولية كما يلي

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

فنتحصل على : $72 = 2^3 \times 3^2$ و $48 = 2^4 \times 3^1$

قواسم 2^3 هي: $1 = 2^0$ و $2 = 2^1$ و $4 = 2^2$ و $8 = 2^3$

قواسم 3^2 هي: $1 = 3^0$ و $3 = 3^1$ و $9 = 3^2$

فنتحصل على جدول بيتاغور التالي :

×	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72

إذا $D_{72} = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$

قواسم 2^4 هي: $1 = 2^0$ و $2 = 2^1$ و $4 = 2^2$ و $8 = 2^3$ و $16 = 2^4$

قواسم 3^1 هي: $1 = 3^0$ و $3 = 3^1$

فنتحصل على جدول بيتاغور التالي:

×	1	2	4	8	16
1	1	2	4	8	16
3	3	6	12	24	48

إذا $D_{48} = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$

وبالتالي القواسم المشتركة للعددين 72 و 48

$D_{48} \cap D_{72} = \{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24\}$

وبالتالي: ق.م.أ(72 ، 48) = 24

www.najahni.tn

طريقة الحصول على القاسم المشترك الأكبر

لدينا $24 = 3^1 \times 2^3$ و $48 = 2^4 \times 3^1$ و $72 = 2^3 \times 3^2$ و 24 = ق.م.أ(72 ، 48) وبالتالي نلاحظ أن تفكيك العدد 24 إلى جذاء عوامل أولية يمثل جذاء العوامل الأولية المشتركة للعددين 72 و 48 مع إسناد أصغر دليل قوة.

وهذا يعني أن القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين هو جذاء العوامل الأولية المشتركة للعددين مع إسناد أصغر دليل قوة.

مثال 1: $600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$ و $1300 = 2^2 \times 5^2 \times 13^1$ إذا $100 = 25 \times 4 = 2^2 \times 5^2$ = ق.م.أ(600 ، 1300)

مثال 2: $a = 3^3 \times 11^1 \times 5^2 \times 2^4$ و $b = 7^2 \times 11^2 \times 3^2 \times 5^3$ و $c = 7^1 \times 13^1 \times 3^2 \times 5^4$

إذا $225 = 9 \times 25 = 3^2 \times 5^2$ = ق.م.أ(a ، b ، c)

هناك طريقة ثانية تسمى بخوارزمية إقليدس

للحصول على القاسم المشترك الأكبر للعددين 1850 و 270 نستعمل خوارزمية إقليدس كما يلي:

وبالتالي : ق.م.أ (1850 ، 270) = 10

العدد الأكبر	العدد الأصغر	باقي القسمة
1850	270	230
270	230	40
230	40	30
40	30	10
30	10	0

خوارزمية إقليدس

هناك طريقة ثالثة تسمى بطريقة المخطط

للحصول على القاسم المشترك الأكبر للعددين 1260 و 480 نستعمل الطريقة التالية:

وبالتالي فإن : ق.م.أ(1260 ، 480) = 10 × 2 × 3 × 1 = 60

طريقة المخطط

www.najahni.tn

ملاحظة:

❖نقول بأن عددان صحيحان طبيعيان أوليّان فيما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر مساو لواحد.
أي إذا كان $1 = $ ق.م.أ$(a ، b)$ فإن a و b أوليّان فيما بينهما.

❖إذا كان a عدد صحيح مضاعف للعدد الصحيح الطبيعي b (b قاسم لـ a) فإن $b = $ ق.م.أ$(a ، b)$
مثال : $35 = $ ق.م.أ$(35 ، 105)$ لأن 105 مضاعف لـ 35.

❖ مجموعة القواسم المشتركة لعددين صحيحين طبيعيين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر
أي إذا كان $d = $ ق.م.أ$(a ، b)$ فإن $D_a \cap D_b = D_d$
مثال : $100 = $ ق.م.أ$(1300 ، 600)$ إذا

$$D_{600} \cap D_{1300} = D_{100} = \{ 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20 , 25 , 50 , 100\}$$

www.najahni.tn

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين

تعريف:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين مخالفين للصفر هو أصغر مضاعف مشترك لهما مخالف للصفر (لأن صفر مضاف لأي عدد صحيح طبيعي)

نرمز للمضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين a و b بـ م.م.أ(a ، b)

لنعتبر M_5 مضاعفات العدد 5 و M_7 مضاعفات العدد 7.

$M_5 = \{0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35 , 40 , 45 , 50 , 55 , 60 , 65 , \ldots\}$

$M_7 = \{0 , 7 , 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , 49 , 56 , 63 , 70 , 77 , 84 , \ldots\}$

نلاحظ بأن أصغر مضاعف مشترك لـ 5 و 7 المخالف للصفر هو 35 فنكتب :

م.م.أ(7 ، 5) = 35

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين نقوم بتفكيك كل منهما إلى جذاء عوامل أولية ثم نحسب جذاء العوامل المشتركة والغير مشتركة مع إسناد أكبر دليل لكل منها وهذا يعني أن:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين هو جذاء العوامل المشتركة والغير مشتركة مع إسناد أكبر دليل لكل منها.

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر للعددين 1300 و 600 نفكك العددين إلى جذاء عوامل أولية فنجد أن:

$600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$ و $1300 = 2^2 \times 5^2 \times 13^1$

إذا $13^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 2^3$ = م.م.أ(600 ، 1300)

$= 8 \times 25 \times 33 = 200 \times 33$

$= 6600$

www.najahni.tn

ملاحظة:

❖ المضاعفات المشتركة لعددين صحيحين طبيعيين هي مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر

أي إذا كان $m = م.م.أ(a \ ، \ b)$ فإن $M_a \cap M_b = M_m$.

❖ إذا كان a عدد صحيح مضاعف للعدد الصحيح الطبيعي b (b قاسم لـ a) فإن $a = م.م.أ(a \ ، \ b)$

مثال : $105 = ق.م.أ(35 \ ، \ 105)$ لأن 105 مضاعف لـ 35.

❖ مهما يكن العددان الصحيحان الطبيعيان a و b المخالفان للصفر فإن:

$$a \times b = م.م.أ(a \ ، \ b) \times ق.م.أ(a \ ، \ b)$$

❖ إذا كان a و b عددان أوليّان فيما بينهما (أي $1 = ق.م.أ(a \ ، \ b)$) فإن $a \times b = م.م.أ(a \ ، \ b)$

مثال : $1 = ق.م.أ(15 \ ، \ 28)$ إذا $420 = 15 \times 28 = م.م.أ(15 \ ، \ 28)$

www.najahni.tn