ملخص الدرس المقارنة في $\mathbb{R}$ قواعد المقارنة	الأستاذة الشريف

I. المقارنة باستعمال الفرق

مهما يكن a و b عددين حقيقيين فإن :

$a - b \leq 0$ يعني $a \leq b$

II. الترتيب و الجمع

1) مهما تكن x و y و z أعداد حقيقية فإن :

$x \leq y$ يعني $x + z \leq y + z$

2) مهما تكن الأعداد حقيقية x و y و z و t

إذا كان : $x \leq y$ و $z \leq t$ فإن $x + z \leq y + t$

III. الترتيب و الضرب

ليكن a و b و c أعداد حقيقية

1) إذا كان $c \in \mathbb{R}_+^*$ (c موجب قطعا) فإن $a \leq b$ يعني $ac \leq bc$	2) إذا كان $c \in \mathbb{R}_-^*$ (c سالب قطعا) فإن $a \leq b$ يعني $ac \geq bc$

استنتاج $a \leq b$ يعني $-a \geq -b$

IV. مقارنة مقلوبي عددين مخالفين للصفر

مهما يكن x و y عددان حقيقيان مخالفان لصفر و لهما نفس العلامة

فإن : $x \leq y$ يعني $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

V. مقارنة مربعي عددين حقيقيين

1) إذا كان x و y عددان موجبان فإن $x \leq y$ يعني $x^2 \leq y^2$	2) إذا كان x و y عددان سالبان فإن $x \leq y$ يعني $x^2 \geq y^2$

استنتاج مهما يكن x و y عددان حقيقيان فإن

$|x| \leq |y|$ يعني $|x|^2 \leq |y|^2$

التمرين عـــ1ـــدد (2001)

نعتبر العددين الحقيقيين :

$a = \sqrt{3}(2+\sqrt{3})-2$ و $b = 6\sqrt{2}-\sqrt{18}+1$

1) بيّن أنّ $a = 1+2\sqrt{3}$ و $b = 1+3\sqrt{2}$

2) أ- قارن بين العددين $3\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}$

ب- أثبت أنّ $1 < a < b$

ج- استنتج ترتيبا للأعداد $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ و 1

التمرين عـــ2ـــدد (2002)

1) نعتبر العدد الحقيقي : $a = |2\sqrt{2}-3|$

أ- قارن بين العددين 3 و $2\sqrt{2}$

ب- استنتج أنّ : $a = 3-2\sqrt{2}$

2) نعتبر العدد الحقيقي $b = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{18}+1$

بيّن أنّ : $b = 3+2\sqrt{2}$

3) أ- أحسب الجذاء $a.b$ واستنتج أنّ العدد a هو مقلوب العدد b

ب- أحسب العدد $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ واستنتج أنّه عدد صحيح طبيعي.

التمرين عـــ3ـــدد (2003)

1) نعتبر العدد الحقيقي : $a = \sqrt{125}-\sqrt{20}-1$.

أ- بيّن أنّ $a = 3\sqrt{5}-1$.

ب- أثبت أنّ a عدد موجب.

2) ليكن العدد الحقيقي $b = 6+4\sqrt{5}$.

أ- أحسب $a\,b$.

ب- بيّن أنّ $(b-a)^2 = a\,b$.

ج- استنتج أنّ : $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{1}{b-a}$.

التمرين عــــ4ــدد (2004)

نعتبر العدد الحقيقي $a=\sqrt{9}+\sqrt{98}-\sqrt{50}$

1) أ- بيّن أنّ $a=3+2\sqrt{2}$

ب- بيّن أنّ $a-5=2(\sqrt{2}-1)$

ج- استنتج أنّ $a\rangle 5$

2) أ- بيّن أنّ $a=(1+\sqrt{2})^2$

ب- استنتج مقارنة للعددين $1+\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$

التمرين عــــ5ــدد (2005)

نعتبر العددين $a=3+\sqrt{162}-10\sqrt{2}$ و $b=(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+1$

1) أ- بيّــن أنّ $a=3-\sqrt{2}$

ب- ما هي علامة العدد a ؟ علّل جوابك.

ج- بيّــن أنّ $b=\sqrt{3}$

2) أ- بيّــن أنّ $a^2-b^2=2(4-3\sqrt{2})$

ب- قــارن بيــن العددين 4 و $3\sqrt{2}$

ج- استنتج مقارنة العددين a و b

التمرين عــــ6ــدد (2006)

1) نعتبر العدد $a=2\sqrt{75}-4\sqrt{12}$

بيّــن أنّ $a=2\sqrt{3}$

2) نعتبر العدد $b=2+\sqrt{3}$

أ - قــارن بيــن العددين a و b

ب - بيّن أنّ $2-\sqrt{3}$ هو مقلوب العدد b

ج - بيّن أنّ $\frac{1}{2\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$

التمرين عــ7ــدد (2007)

1) نعتبر العدد الحقيقي $a=\sqrt{50}-\sqrt{8}(\sqrt{2}+1)$

أ ـ بيّن أنّ $a=3\sqrt{2}-4$

ب ـ قارن بين العددين 4 و $3\sqrt{2}$

ج ـ استنتج أنّ a عدد موجب

2) نعتبر العددين الحقيقيين $x=\frac{7}{\sqrt{2}+1}$ و $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

أ ـ بيّن أنّ $x-y=2a$

ب ـ استنتج مقارنة العددين x و y

التمرين عــ8ــدد (2008)

1) نعتبر العدد الحقيقي $a=2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)-4$

أ ـ بيّن أنّ $a=6-2\sqrt{5}$

ب ـ قارن بين العددين 6 و $2\sqrt{5}$

ج ـ استنتج أنّ a عدد موجب.

2) بيّن أنّ $a=(\sqrt{5}-1)^2$

3) ليكن العدد الحقيقي $b=\sqrt{245}-\sqrt{45}$

أ ـ بيّن أنّ $b=4\sqrt{5}$

ب ـ بيّن أنّ $\frac{b-a}{\sqrt{5}-1}$ عدد صحيح طبيعي.

التمرين عــ9ــدد (2009)

1) نعتبر العدد الحقيقي $a=5\sqrt{2}-7$

أ- قارن بين العددين 7 و $5\sqrt{2}$

ب- استنتج علامة العدد a.

2) ليكن العدد الحقيقي $b=\sqrt{200}-\sqrt{50}+\sqrt{49}$

أ- بين أنّ $b=5\sqrt{2}+7$

ب- بين أنّ b هو مقلوب العدد a .

ج- بين أنّ العددين b و $b(a-1)-1$ متقابلان.

التمرين عـــ10ـــدد (2010)

نعتبر العددين $A = 1 + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$ و $B = 3 + \sqrt{32} - 3\sqrt{8}$

1) أ) بيّن أن : $A = 3 + 2\sqrt{2}$ وأن $B = 3 - 2\sqrt{2}$

ب) بيّن أن العدد B هو مقلوب العدد A

ج) استنتج مقارنة العددين 3 و $2\sqrt{2}$

2) ليكن العدد الحقيقي $C = \frac{A}{B} + \frac{B}{A}$

بين أن C عدد صحيح طبيعي.

التمرين عـــ11ـــدد (2011)

نعتبر العددين : $a = (\sqrt{3} + 2)^2$ و $b = 3\sqrt{18} - \sqrt{32} + 7$

1 – أ- بيّن أنّ $a = 7 + 4\sqrt{3}$ وأن $b = 7 + 5\sqrt{2}$.

ب- قارن العددين $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$ ثم استنتج مقارنة للعددين a و b.

2- نعتبر العدد $c = 7 - 4\sqrt{3}$

أ- بيّن أنّ العددين a و c مقلوبان.

ب- استنتج أنّ $bc > 1$.

3- بيّن أنّ العدد $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2}$ هو عدد صحيح طبيعي.

التمرين عـــ12ـــدد (2012)

نعتبر العددين الحقيقيّين : $a = 7 + 4\sqrt{3}$ و $b = 7 - 4\sqrt{3}$

1- أ- بيّن أنّ العدد a مقلوب العدد b

ب- أحسب a^2 و b^2

ج- بيّن أنّ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 194$

2- ليكن العدد $c = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$

أحسب c^2 ثمّ استنتج c

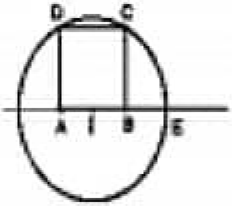
التمرين عــــ13ــــدد (2013)

نعتبر العددين الحقيقيين $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ و $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1) أ) أحسب $a+b$

ب) بيّن أنّ b مقلوب العدد a.

2) (وحدة قيس الطول هي الصنتمتر).



ABCD مربّع بحيث AB=1 و I منتصف [AB].

الدائرة التي مركزها I و تمرّ من النقطة C تقطع نصف المستقيم (AB) في نقطة E.

أ) أحسب البعد IC

ب) بيّن أنّ $AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $BE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

التمرين عــــ14ــــدد (2014)

نعتبر العددين الحقيقيين $a = 4-3\sqrt{12}+\sqrt{48}$ و $b = (1+\sqrt{3})^2$

1) بيّن أنّ $a = 4-2\sqrt{3}$ و $b = 4+2\sqrt{3}$

2) قارن بين $2\sqrt{3}$ و 4 ثمّ استنتج علامة العدد a

3) أ) بيّن أنّ $a \times b = 4$

ب) استنتج أنّ $\sqrt{\frac{a}{b}} = 2-\sqrt{3}$

4) ليكن العدد الحقيقي $c = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

أ) بيّن أنّ العدد c سالب.

ب) احسب c^2 ثمّ استنتج c.

التمرين عـــــ15ـــدد (2015)

نعتبر العددين الحقيقيين a و b حيث $a = \frac{(1+\sqrt{13})^2 - 8}{4}$ و $b = \frac{\sqrt{52} - 6}{4}$.

1) بيّن أنّ $a = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$ و $b = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$

2) أ) أحسب $b - a$

ب) بيّن أنّ a مقلوب b

ج) بيّن أنّ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2 = (b-a)^2$

ثمّ إستنتج قيمة $\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2}$

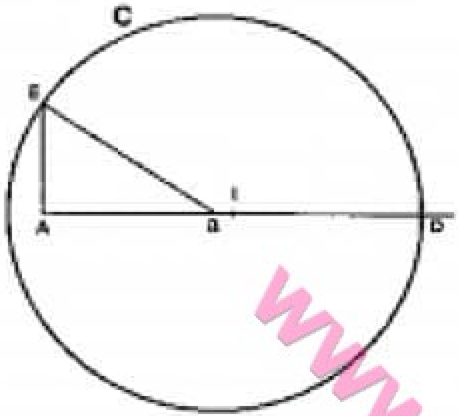
3) (وحدة القيس هي الصنتمتر)

في الرّسم المقابل لدينا :

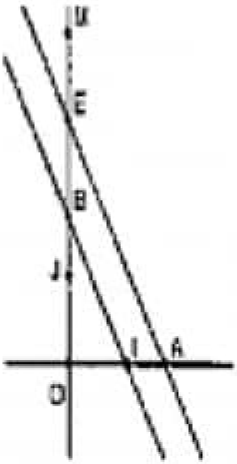
- ABE مثلث قائم حيث $AB = 3$ و $AE = 2$.
- C دائرة مركزها B وتمرّ من النقطة E
- D نقطة تقاطع الدائرة C ونصف المستقيم [AB)
- I منتصف قطعة المستقيم [AD]

أ) أحسب BE

ب) بيّن أنّ $AI = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$ و $BI = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$



التمرين عـــــ16ـــدد (2016)



في الرّسم المقابل لدينا (O, I, J) معيّن متعامد من المستوي حيث $OI = OJ = 1$ و $A(a, 0)$ و $B(0, a)$ نقطتان من المستوي علما أنّ a عدد حقيقي و $a > 1$.

1) المستقيم المارّ من A والموازي للمستقيم (BI) يقطع (OJ) في النقطة E.

بيّن أنّ $\frac{OA}{OI} = \frac{OE}{OB}$ ثمّ إستنتج أنّ $OE = a^2$.

2) لتكن النقطة M من نصف المستقيم [OJ) حيث $EM=1$ و M لا تنتمي لقطعة المستقيم [OE].

حدّد البعد OM بدلالة a.

3) المستقيم المارّ من النقطة J والموازي للمستقيم (AM) يقطع (OI) في النقطة K.

بيّن أنّ $OK = \frac{a}{a^2+1}$

4) أ) أثبت أنّ $(x-2)(x-\frac{1}{2}) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ حيث x عدد حقيقي.

ب) بيّن إذا كان $OK = \frac{2}{5}$ فإنّ النقطة I منتصف قطعة المستقيم [OA]

التمرين عــــ17ـــدد (2017)

نعتبر العددين الحقيقيين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11+6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11-6\sqrt{2}$.

1) أ) قارن العددين a^2 و b^2 .

ب) بيّن أنّ $(a-b)$ عدد موجب.

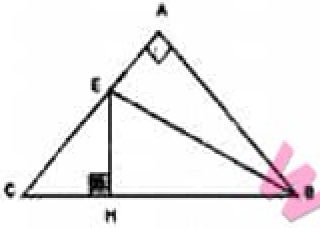
2) أحسب a^2b^2 ثمّ استنتج أنّ $ab = 7$.

3) أحسب $(a-b)^2$ ثمّ إستنتج أنّ $a-b = 2\sqrt{2}$.

(وحدة قيس الطول الصنتمتر)

في الرّسم المقابل لدينا :

- ABC مثلّث متقايس الضلعين وقائم في A، حيث $AB = a$
- E النقطة من $[AC]$ حيث $AE = b$
- H المسقط العمودي للنقطة E على (BC).



4) أ) بيّن أنّ المثلّث HEC متقايس الضلعين.

ب) بيّن أنّ $EH = 2$.

5) لتكن S مساحة المثلّث BEC.

أ) بيّن أنّ $S = a\sqrt{2}$.

ب) بيّن أيضا أنّ $S = 2+3\sqrt{2}$، ثمّ إستنتج أنّ $a = 3+\sqrt{2}$.

التمرين عــــ18ـــدد (2018)

نعتبر العددين الحقيقيين $a = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)-(\sqrt{5}-1)}{4}$ و $b = \dfrac{6-\sqrt{20}}{4}$

1) بيّن أنّ $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $b = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

2) أ) بيّن أنّ a و b عددان مقلوبان.

ب) أحسب a + b

ج) بيّن أنّ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} = (a+b)^2 - 2ab$ ثمّ احسب $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

3) أ) بيّن أنّ $2 \le \sqrt{5} \le \dfrac{5}{2}$

ب) بيّن أنّ $\dfrac{5}{2} \le a \le \dfrac{11}{4}$

ج) استنتج حصرا للعدد b ثمّ تحقّق أن مداه أصغر قطعا من 0,04.

التمرين عـــــدد 19 (2019)

نعتبر العددين الحقيقيين $a = 12 + \sqrt{200} - \sqrt{8}$ و $b = 2(6 + 3\sqrt{3})$

1) أ) بيّن أنّ $a = 2(6 + 4\sqrt{2})$

ب) قارن بين $4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$ ثمّ استنتج أنّ $b < a$

2) بيّن أنّ $b = (3 + \sqrt{3})^2$ و $a = (2 + 2\sqrt{2})^2$

3) ليكن العدد الحقيقي $c = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{2}}$

أ) بيّن أنّ $c^2 < 1$

ب) بيّن أنّ $\dfrac{1}{2} < c < 1$

التاسعة أساسي	إصلاح تمارين المقارنة من 1 إلى 19 من مناظرات 2001 إلى 2019 على التوالي	الأستاذة الشريف

التمرين عــ1ـــدد (2001)

1)

$a = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) - 2$ $= 2\sqrt{3} + 3 - 2$ $= 2\sqrt{3} + 1$ $= 1 + 2\sqrt{3}$ إذن $\boldsymbol{a = 1 + 2\sqrt{3}}$	$b = 6\sqrt{2} - \sqrt{18} + 1$ $= 6\sqrt{2} - \sqrt{9\times 2} + 1$ $= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1$ $= 3\sqrt{2} + 1$ $= 1 + 3\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{b = 1 + 3\sqrt{2}}$

2) أ- $(2\sqrt{3})^2 = 12$ و $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $12 < 18$

إذن $(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$ و لنا $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{2}$ موجبان فإن $\boldsymbol{2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}}$

ب- لدينا $2\sqrt{3}$ عدد موجب قطعا يعني $2\sqrt{3} > 0$ إذن $2\sqrt{3} + 1 > 0 + 1$ أي $a > 1$

و $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ إذن $2\sqrt{3} + 1 < 3\sqrt{2} + 1$ أي $a < b$

لنا $\begin{cases} a > 1 \\ a < b \end{cases}$ و يعني $\boldsymbol{1 < a < b}$

التمرين عــ2ـــدد (2002)

1) أ- $(2\sqrt{2})^2 = 8$ و $3^2 = 9$ و $8 < 9$

إذن $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$ ولنا $2\sqrt{2}$ و 3 موجبان فإن $\boldsymbol{2\sqrt{2} < 3}$

ب- بما أن $2\sqrt{2} < 3$ فإن $2\sqrt{2} - 3 < 0$ أي $2\sqrt{2} - 3$ عدد سالب

و بالتالي $a = |2\sqrt{2} - 3|$

$= -(2\sqrt{2} - 3)$

$= -2\sqrt{2} + 3$

$= 3 - 2\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{a = 3 - 2\sqrt{2}}$

2) $b = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{18} + 1$

$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{9 \times 2} + 1$

$= 2 + 1 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$= 3 + 2\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{b = 3 + 2\sqrt{2}}$

3) أ- $ab = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

$= 3^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= 9 - 8 = 1$ إذن $\boldsymbol{ab = 1}$

بما أن $ab = 1$ فإن a و b مقلوبان و بالتالي **a هو مقلوب b**

ب- بما أن a هو مقلوب b فإن $\frac{1}{a} = b$ و $\frac{1}{b} = a$

و بالتالي $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = b + a$

$= (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})$

$= 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}$

$= 6$ إذن $\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6}$

و بما أن 6 عدد صحيح طبيعي **فإن** **$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ عدد صحيح طبيعي**

التمرين عــ3ــــدد (2003)

1) أ- $a = \sqrt{125} - \sqrt{20} - 1$

$= \sqrt{25 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} - 1$

$= 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 1$

$= 3\sqrt{5} - 1$ إذن $\boldsymbol{a = 3\sqrt{5} - 1}$

ب- $(3\sqrt{5})^2 = 45$ و $1^2 = 1$ و $1 < 45$

إذن $(3\sqrt{5})^2 > 1^2$ و لنا $3\sqrt{5}$ و 1 موجبان فإن $1 < 3\sqrt{5}$

و بالتالي $3\sqrt{5} - 1 > 0$ و منه $3\sqrt{5} - 1$ عدد موجب أي أن **a عدد موجب**

2) $ab = (3\sqrt{5} - 1)(6 + 4\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5} \times 6 - 1 \times 6 + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} - 1 \times 4\sqrt{5}$

$= 18\sqrt{5} - 6 + 60 - 4\sqrt{5}$

$= 14\sqrt{5} + 54$ إذن $\boldsymbol{ab = 14\sqrt{5} + 54}$

ب- $(b-a)^2 = \left[(6+4\sqrt{5}) - (3\sqrt{5}-1)\right]^2$

$$= \left[6+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+1\right]^2$$

$$= (7+\sqrt{5})^2$$

$$= 7^2 + 2\times 7\times\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$= 49 + 14\sqrt{5} + 5$$

$$= 54 + 14\sqrt{5}$$ إذن $(b-a)^2 = 54 + 14\sqrt{5}$

لدينا $\begin{cases} ab = 14\sqrt{5} + 54 \\ (b-a)^2 = 54 + 14\sqrt{5} \end{cases}$ و إذن $\boldsymbol{(b-a)^2 = ab}$

ج- $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab}$

$$= \frac{b-a}{ab}$$

$$= \frac{b-a}{(b-a)^2}$$

$$= \frac{(b-a)}{(b-a)(b-a)}$$

$$= \frac{1}{b-a}$$ إذن $\boldsymbol{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b-a}}$

التمرين عــهـــدد (2004)

1)

أ- $a = \sqrt{9} + \sqrt{98} - \sqrt{50}$

$= 3 + \sqrt{49\times 2} - \sqrt{25\times 2}$

$= 3 + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 3 + 2\sqrt{2}$

إذن $\boldsymbol{a = 3 + 2\sqrt{2}}$

ب- $a - 5 = (3+2\sqrt{2}) - 5$

$= 3 + 2\sqrt{2} - 5$

$= 2\sqrt{2} - 2$

$= 2\sqrt{2} - 2\times 1$

$= 2(\sqrt{2} - 1)$

إذن $\boldsymbol{a - 5 = 2(\sqrt{2} - 1)}$

ج- بما أن $\sqrt{2} > 1$ ($\sqrt{2} = 1,\ldots\ldots\ldots$) فإن $\sqrt{2} - 1 > 0$ و 2 عدد موجب قطعا

و بالتالي $2(\sqrt{2} - 1) > 0$ و منه $a - 5 > 0$ يعني $a > 5$

2) أ- $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+2$

$= 3+2\sqrt{2} = a$ إذن $\boldsymbol{a = \left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

ب- بما أن $a > 5$ فإن $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 > 5$ أي $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 > \left(\sqrt{5}\right)^2$

و لنا $1+\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ موجبان إذن $\boldsymbol{1+\sqrt{2} > \sqrt{5}}$

التمرين عــ5ـــدد (2005)

1) أ- $a = 3+\sqrt{162}-10\sqrt{2}$

$= 3+\sqrt{81\times 2}-10\sqrt{2}$

$= 3+9\sqrt{2}-10\sqrt{2}$

$= 3+(9-10)\sqrt{2}$

$= 3-\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{a = 3-\sqrt{2}}$

ب- بما أن $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ و $3^2 = 9$ و $9 > 2$

فإن $3^2 > \left(\sqrt{2}\right)^2$ و لنا $\sqrt{2}$ و 3 موجبان إذن $3 > \sqrt{2}$

و بالتالي $3-\sqrt{2} > 0$ و منه **a عدد موجب قطعا**

ج- $b = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)+1$

$= 2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-3+1$

$= \sqrt{3}$ إذن $\boldsymbol{b = \sqrt{3}}$

2) أ- $a^2-b^2 = \left(3-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 3^2-2\times 3\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-3$

$= 9-6\sqrt{2}+2-3$

$= 8-6\sqrt{2}$

$= 2\times 4-2\times 3\sqrt{2}$

$= 2\left(4-3\sqrt{2}\right)$ إذن $\boldsymbol{a^2-b^2 = 2\left(4-3\sqrt{2}\right)}$

ب- $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ و $4^2 = 16$ و $16 < 18$

إذن $\left(3\sqrt{2}\right)^2 > 4^2$ و لنا $3\sqrt{2}$ و 4 موجبان فإن $\mathbf{4 < 3\sqrt{2}}$

ج- بما أن $4 < 3\sqrt{2}$ فإن $4 - 3\sqrt{2} < 0$ و 2 عدد موجب قطعا فإن $2\left(4 - 3\sqrt{2}\right) < 0$

و منه $a^2 - b^2 < 0$ يعني $a^2 < b^2$ و بما أن a و b موجبان فإن $\boldsymbol{a < b}$

التمرين عــ6ـــدد(2006)

1) $a = 2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}$

$= 2\sqrt{25 \times 3} - 4\sqrt{4 \times 3}$

$= 2 \times 5\sqrt{3} - 4 \times 2\sqrt{3}$

$= (10 - 8)\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$ إذن $\boldsymbol{a = 2\sqrt{3}}$

2) أ- $a - b = 2\sqrt{3} - \left(2 + \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 2$

بما أن $\sqrt{3} < 2$ ($\sqrt{3} = 1,\dots\dots\dots$) فإن $\sqrt{3} - 2 < 0$

و بالتالي $a - b < 0$ يعني $\boldsymbol{a < b}$

ب- $\left(2 - \sqrt{3}\right)b = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)$

$= 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 4 - 3$

$= 1$

بما أن $\left(2 - \sqrt{3}\right)b = 1$ فإن $2 - \sqrt{3}$ و b عددان مقلوبان و منه $\mathbf{2 - \sqrt{3}}$ **هو مقلوب** $\boldsymbol{b}$

ج- لدينا $\boldsymbol{a < b}$ و a و b لهما نفس العلامة (موجبان) إذن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

و لنا $2 - \sqrt{3}$ هو مقلوب b أي $\frac{1}{b} = 2 - \sqrt{3}$ و $\frac{1}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

إذن $\frac{1}{2\sqrt{3}} > 2 - \sqrt{3}$ يعني $\mathbf{2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}}}$

التمرين عـــ7ـــدد (2007)

1) أ- $a = \sqrt{50} - \sqrt{8}\left(\sqrt{2} + 1\right)$

$= \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{4 \times 2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$

$= 5\sqrt{2} - 2 \times \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

$= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \times 1$

$= 5\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2}$

$= (5-2)\sqrt{2} - 4$

$= 3\sqrt{2} - 4$ إذن $\boldsymbol{a = 3\sqrt{2} - 4}$

ب- بما أن $(3\sqrt{2})^2 = 18$ و $4^2 = 16$ و $16 < 18$

فإن $4^2 < (3\sqrt{2})^2$ و لنا $3\sqrt{2}$ و 4 موجبان إذن $\boldsymbol{4 < 3\sqrt{2}}$

بما أن $4 < 3\sqrt{2}$ فإن $3\sqrt{2} - 4 > 0$ و بالتالي **a عدد موجب قطعا**

2) أ- $x - y = \frac{7}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$= \frac{7(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{7(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 7 - \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2} - 8}{2-1}$$

$$= \frac{2 \times 3\sqrt{2} - 2 \times 4}{1}$$

$= 2(3\sqrt{2} - 4)$

$= 2a$ إذن $\boldsymbol{x - y = 2a}$

ب- بما أن $x - y = 2a$ و a عدد موجب قطعا و 2 عدد موجب قطعا

فإن $x - y > 0$ يعني $\boldsymbol{x > y}$

التمرين عــــ8ــــدد (2008)

1) أ- $a = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) - 4$

$= 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 4$

$= 10 - 2\sqrt{5} - 4$

$= 6 - 2\sqrt{5}$ إذن $\boldsymbol{a = 6 - 2\sqrt{5}}$

ب- بما أن $(2\sqrt{5})^2 = 20$ و $6^2 = 36$ و $20 < 36$

فإن $(2\sqrt{5})^2 < 6^2$ و لنا $2\sqrt{5}$ و 6 موجبان إذن $\boldsymbol{2\sqrt{5} < 6}$

ج- بما أن $2\sqrt{5} < 6$ أي $6 > 2\sqrt{5}$ **فإن** $6 - 2\sqrt{5} > 0$ و بالتالي **a عدد موجب قطعا**

2) $(\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1$

$= 6 - 2\sqrt{5}$

$= a$ إذن $\boldsymbol{a = (\sqrt{5} - 1)^2}$

3) أ- $b = \sqrt{49 \times 5} - \sqrt{9 \times 5}$

$= 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

$= (7 - 3)\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{5}$ إذن $\boldsymbol{b = 4\sqrt{5}}$

ب- $\frac{b-a}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\sqrt{5}-(6-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}$

$= \frac{4\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$

$= \frac{6\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} - 1} = \frac{6(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 1} = 6$

إذن $\frac{b-a}{\sqrt{5}-1} = 6$ و بالتالي **$\frac{b-a}{\sqrt{5}-1}$ عدد صحيح طبيعي**

التمرين عــوــدد (2009)

1) أ- $a = 5\sqrt{2} - 7$

بما أن $(5\sqrt{2})^2 = 50$ و $7^2 = 49$ و $49 < 50$

فإن $(5\sqrt{2})^2 > 7^2$ و لنا $5\sqrt{25}$ و 7 موجبان إذن $\boldsymbol{5\sqrt{2} > 7}$

ب- بما أن $5\sqrt{2} > 7$ فإن $5\sqrt{2} - 7 > 0$ و بالتالي **a عدد موجب قطعا**

2) أ -
$$b=\sqrt{200}-\sqrt{50}+\sqrt{49}$$
$$=\sqrt{100\times 2}-\sqrt{25\times 2}+7$$
$$=10\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7$$
$$=5\sqrt{2}+7$$
إذن $\boldsymbol{b=5\sqrt{2}+7}$

ب -
$$ab=(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)$$
$$=(5\sqrt{2})^2-7^2$$
$$=50-49$$
$$=1$$

بما أن $ab=1$ فإن a و b مقلوبان و بالتالي **b هو مقلوب a**

ج -
$$[b(a-1)-1]+b=ba-b-1+b$$
$$=1-b-1+b$$
$$=0$$

بما أن $[b(a-1)-1]+b=0$ فإن **b و $b(a-1)-1$ عددان متقابلان**

التمرين عـ10ــــدد (2010)

1)

$A=1+\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$ $=1+2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ $=1+2\sqrt{2}+2$ $=3+2\sqrt{2}$ إذن $\underline{\boldsymbol{a=3+2\sqrt{2}}}$	$B=3+\sqrt{32}-3\sqrt{8}$ $=3+\sqrt{16\times 2}-3\sqrt{4\times 2}$ $=3+4\sqrt{2}-3\times 2\sqrt{2}$ $=3+4\sqrt{2}-6\sqrt{2}$ $=3-2\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{b=3-2\sqrt{2}}$

$$AB=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$$

ب - بما أن $AB=1$ فإن A و B مقلوبان و بالتالي **B هو مقلوب A**

ج - بما أن B هو مقلوب A فإن A و B مخالفان لصفر و لهما نفس العلامة

و لنا $A=1+\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$ عدد موجب قطعا إذن B أيضا عدد موجب قطعا

وبالتالي $3 - 2\sqrt{2} > 0$ يعني $3 > 2\sqrt{2}$

2) $C = \frac{A}{B} + \frac{B}{A} = A \times \frac{1}{B} + B \times \frac{1}{A}$ و A و B مقلوبان فإن $\frac{1}{A} = B$ و $\frac{1}{B} = A$

و بالتالي
$$\begin{aligned} C &= \frac{A}{B} + \frac{B}{A} \\ &= A \times A + B \times B \\ &= A^2 + B^2 \\ &= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \left[3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right] + \left[3^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= 9 + 8 + 9 + 8 = 34 \end{aligned}$$

إذن $C = 34$ و منه **C عدد صحيح طبيعي**

التمرين عـــ11ـــدد (2011)

1) أ -

$\left(\sqrt{3}+2\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3} \times 2 + 4$ $= 7 + 4\sqrt{3}$ $= a$ إذن $\boldsymbol{a = 7 + 4\sqrt{3}}$	$b = 3\sqrt{18} - \sqrt{32} + 7$ $= 3 \times 3\sqrt{2} - \sqrt{16 \times 2} + 7$ $= 9\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 7$ $= 7 + 5\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{b = 7 + 5\sqrt{2}}$

ب - بما أن $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$ و $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$ و $48 < 50$

فإن $\left(4\sqrt{3}\right)^2 < \left(5\sqrt{2}\right)^2$ و لنا $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$ موجبان فإن $\boldsymbol{4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}}$

بما أن $\boldsymbol{4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}}$ فإن $\boldsymbol{4\sqrt{3} + 7 < 5\sqrt{2} + 7}$ أي $\boldsymbol{a < b}$

2) أ - $ac = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$
$$\begin{aligned} &= 7^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 49 - 48 \\ &= 1 \end{aligned}$$

بما أن $ac = 1$ فإن **a و c مقلوبان**

ب - بما أن $\boldsymbol{a > b}$ و c موجب فإن $ac < bc$ و بالتالي $\boldsymbol{bc > 1}$

3) بما أن a هو مقلوب c فإن $c = \frac{1}{a}$ و $a = \frac{1}{c}$

و بالتالي $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2 = aa + cc + 2$

$= a^2 + c^2 + 2 \times 1$

$= a^2 + c^2 + 2 \times a\,c$

$= (a + c)^2$

و منه $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2} = \sqrt{(a + c)^2}$

$= |a + c|$

$= |(7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3})|$

$= |7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}|$

$= |7 + 7|$

$= |14|$

$= 14$

و بالتالي $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2} = 14$ و منه $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2}$ **عدد صحيح طبيعي**

التمرين عــ12ـــدد (2012)

1) أ- $ab = (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})$

$= 7^2 - (4\sqrt{3})^2$

$= 49 - 48$

$= 1$

بما أن $ab = 1$ فإن a و b مقلوبان

ب -

$a^2 = (7 + 4\sqrt{3})^2$ $= 7^2 + 2 \times 7 \times 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3})^2$ $= 49 + 56\sqrt{3} + 16 \times 3$ $= 49 + 48 + 56\sqrt{3}$ $= 97 + 56\sqrt{3}$ إذن $\boldsymbol{a^2 = 97 + 56\sqrt{3}}$	$b^2 = (7 - 4\sqrt{3})^2$ $= 7^2 - 2 \times 7 \times 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3})^2$ $= 49 - 56\sqrt{3} + 16 \times 3$ $= 49 + 48 - 56\sqrt{3}$ $= 97 - 56\sqrt{3}$ إذن $\boldsymbol{b^2 = 97 - 56\sqrt{3}}$

ج -
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=aa+bb$$
$$=a^2+b^2$$
$$=\left(97+56\sqrt{3}\right)+\left(97-56\sqrt{3}\right)$$
$$=97+97=194$$ إذن **$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=194$**

2) $c=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ إذن $c^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$
$$=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2\times\sqrt{\frac{a}{b}}\times\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{a\,b}{ba}}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{1}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$
$$=194+2=196$$

إذن $c^2=196$ و بالتالي $c=\sqrt{196}$ أي **$c=14$**

التمرين عــــ13ـــــدد (2013)

1) أ- $a+b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$$=\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{2}$$
$$=\sqrt{5}$$ إذن **$a+b=\sqrt{5}$**

ب- $a \times b = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{2 \times 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 - 1^2}{4}$$

$$= \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

بما أن $a \times b = 1$ فإن a و b مقلوبان و بالتالي **b مقلوب a**

2) أ- بما أن $ABCD$ مربع فإن $A\hat{B}C = 90°$ و أن $I \in (AB)$ و بالتالي $I\hat{B}C = 90°$
و منه IBC مثلث قائم إذن حسب نظرية بيتاغورفإن
$IC^2 = IB^2 + BC^2$ و لنا $BC = AB = 1$ **لأن** $ABCD$ مربع و $IB = \frac{1}{2}$ **لأن I منتصف** $[AB]$

فإن $IC^2 = IB^2 + BC^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

و منه $IC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و بالتالي $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ب- لدينا $AE = AI + IE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ إذن $AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

و $BE = IE - IB = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ إذن $BE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

التمرين عـــ14ـــدد (2014)

1)

$b = (1+\sqrt{3})^2$ $= 1 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + 3$ $= 4 + 2\sqrt{3}$ إذن **$b = 4 + 2\sqrt{3}$**	$a = 4 - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$ $= 4 - 3\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{16 \times 3}$ $= 4 - 3 \times 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$ $= 4 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$ إذن **$a = 4 - 2\sqrt{3}$**

2) بما أن $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ و $4^2 = 16$ و $12 < 16$

إذن $\left(2\sqrt{3}\right)^2 < 4^2$ و لنا $2\sqrt{3}$ و 4 موجبان فإن $\mathbf{2\sqrt{3}} < 4$

بما أن $2\sqrt{3} < 4$ فإن $4 - 2\sqrt{3} > 0$ و بالتالي $\boldsymbol{a}$ **عدد موجب قطعا**

3) أ- $ab = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$

$$= 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 16 - 12$$

$= 4$ إذن $\boldsymbol{ab = 4}$

ب- بما أن $ab = 4$ و a عدد موجب قطعا

فإن $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{aa}{ba}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{|a|}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$

$$= \frac{\mathbf{4 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

و بالتالي $\sqrt{\frac{a}{b}} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$

4) أ- بما أن $-2\sqrt{3} < 2\sqrt{3}$ ($-2\sqrt{3}$ عدد سالب و $2\sqrt{3}$ عدد موجب)

فإن $-2\sqrt{3} + 4 < 2\sqrt{3} + 4$ و بالتالي $a < b$ وبما أن a و b موجبان

فإن $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ و بالتالي $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ و لنا $c = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ إذن c **عدد سالب قطعا**

ب- $c^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$= a + b - 2\sqrt{ab}$$
$$= a + b - 2\sqrt{4}$$
$$= a + b - 4$$
$$= \left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \left(4 + 2\sqrt{3}\right) - 4$$
$$= 4$$

$c^2 = 4$ يعني $c = \sqrt{4}$ أو $c = -\sqrt{4}$

و بما أن c عدد سالب فإن $c = -\sqrt{4} = -2$ و منه $\boldsymbol{c = -2}$

التمرين عــــ15ـــــدد (2015)

1) $a = \frac{(1+\sqrt{13})^2-8}{4}$ $= \frac{1+2\sqrt{13}+13-8}{4}$ $= \frac{6+2\sqrt{13}}{4}$ $= \frac{2(3+\sqrt{13})}{2\times 2}$ $= \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ إذن $\boldsymbol{a = \frac{\sqrt{13}+3}{2}}$	$b = \frac{\sqrt{52}-6}{4}$ $= \frac{\sqrt{4\times 13}-6}{4}$ $= \frac{2\sqrt{13}-6}{4}$ $= \frac{2(\sqrt{13}-3)}{2\times 2}$ $= \frac{\sqrt{13}-3}{2}$ إذن $\boldsymbol{b = \frac{\sqrt{13}-3}{2}}$

2) أ- $b - a = \frac{\sqrt{13}-3}{2} - \frac{\sqrt{13}+3}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{13}-3)-(\sqrt{13}+3)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{13}-3-\sqrt{13}-3}{2}$$

$$= \frac{-6}{2} = -3$$

إذن $\boldsymbol{b - a = -3}$

ب- $a \times b = \frac{\sqrt{13}+3}{2} \times \frac{\sqrt{13}-3}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)}{2\times 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{13})^2-3^2}{4}$$

$$= \frac{13-9}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

بما أن $a \times b = 1$ فإن $\boldsymbol{a}$ **و** $\boldsymbol{b}$ **مقلوبان**

ج- بما أن a و b مقلوبان فإن $b = \frac{1}{a}$ و $a = \frac{1}{b}$

و بالتالي $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = aa + bb - 2$

$$= a^2 + b^2 - 2 \times 1$$

$$= a^2 + b^2 - 2 \times ab$$

$$= (a - b)^2$$

$$= (b - a)^2$$

إذن $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \mathbf{2} = (b - a)^2$

لدينا $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = (b - a)^2$ إذن $\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} = \sqrt{(b - a)^2}$

$$= |b - a|$$
$$= |-3|$$
$$= 3$$

إذن $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} = 3}$

3) أ- $BE = ?$

بما أن ABE مثلث قائم في A إذن حسب نظرية بيتاغور فإن

$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$ إذن $B^2 = 13$ و بالتالي $\boldsymbol{BE = \sqrt{13}}$

ب $AI = ?$ - لدينا $AD = AB + B$ (لأن $B \in [AD]$) و $BD = B$ (لان E و D نقطتان من الدائرة التي مركزها B) إذن $AD = AB + BE$ $= 3 + \sqrt{13}$ و بما أن منتصف $[AD]$ فإن $AI = \frac{AD}{2}$ $= \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ إذن $\boldsymbol{AI = \frac{3+\sqrt{13}}{2}}$	$BI = ?$ $BI = AI - AB$ (لأن $B \in [AI]$) $= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3$ $= \frac{3 + \sqrt{13} - 6}{2}$ $= \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$ إذن $\boldsymbol{BI = \frac{\sqrt{13}-3}{2}}$

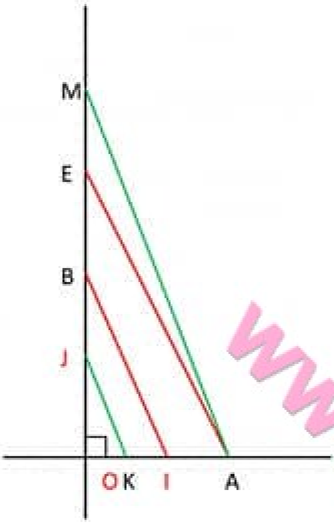
التمرين عــ16ـــدد (2016)

1) $\frac{OA}{OI} = \frac{OE}{OB}$ ؟

في المثلث OBI لنا

$$\begin{cases} E \in (OB) \\ \text{و } A \in (OI) \\ \text{و } (AE)\,//\,(BI) \end{cases}$$ إذن حسب مبرهنة طالس فإن : $\frac{OE}{OB}=\frac{OA}{OI}=\frac{AE}{BI}$ و منه $\frac{OE}{OB}=\frac{OA}{OI}$

$OE=?$



لدينا $\frac{OE}{OB}=\frac{OA}{OI}$ يعني $OE=\frac{OA}{OI}\times OB$

ولنا $OA=|x_A|OI$ (لأن $A\in(OI)$)

$=|a|=a$ (لأن $a>1$ و $OI=1$)

و $OB=|y_B|OJ$ (لأن $B\in(OJ)$)

$=|a|=a$ (لأن $a>1$ و $OJ=1$)

إذن $OE=\frac{OA}{OI}\times OB$

$=\frac{a\times a}{1}=a^2$ إذن $\boldsymbol{OE=a^2}$

2) $OM=?$

بما أن $E\in[OM]$ فإن $OM=OE+EM=a^2+1$ إذن $\boldsymbol{OM=a^2+1}$

3) $OK=\frac{a}{a^2+1}$ ؟

في المثلث OAM لنا

$$\begin{cases} K \in (OA) \\ \text{و } J \in (OM) \\ \text{و } (KJ)\,//\,(AM) \end{cases}$$ إذن حسب مبرهنة طالس فإن : $\frac{OK}{OA}=\frac{OJ}{OM}=\frac{KJ}{AM}$

و منه $\frac{OK}{OA}=\frac{OJ}{OM}$ و بالتالي $OK=\frac{OJ}{OM}\times OA$

ولنا $OJ=1$ (معطى) و $OM=a^2+1$ (مما سبق) و $OA=a$

إذن $OK=\frac{1\times a}{a^2+1}=\frac{a}{a^2+1}$ و منه $\boldsymbol{OK=\frac{a}{a^2+1}}$

التمرين عــ17ـــدد (2017)

1) أ- $a^2=11+6\sqrt{2}$ و $b^2=11-6\sqrt{2}$

بما أن $-6\sqrt{2}<6\sqrt{2}$ ($-6\sqrt{2}$ عدد سالب و $6\sqrt{2}$ عدد موجب)

فإن $11+6\sqrt{2}>11+(-6\sqrt{2})$ و بالتالي $\boldsymbol{b^2<a^2}$

ب- بما أن $b^2 < a^2$ و a و b موجبان (معطى)

فإن $b < a$ ومنه $b - a < 0$ يعني $\boldsymbol{a - b > 0}$

2) $a^2b^2 = (11 + 6\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2})$

$$= 11^2 - (6\sqrt{2})^2$$

$$= 121 - 72$$

$$= 49$$

$a^2b^2 = 49$ و a و b موجبان إذن $ab = \sqrt{49} = 7$ أي $\boldsymbol{ab = 7}$

3) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \times ab$

$$= (11 + 6\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) - 2 \times 7$$

$$= 22 - 14 = 8$$

و بالتالي $a - b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{a - b = 2\sqrt{2}}$

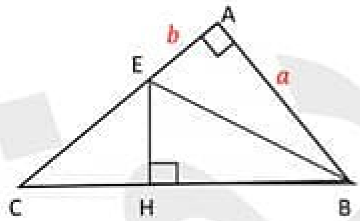
4) أ- $EH = ?$

بما أن CEH مثلث قائم و متقايس الضلعين في H إذن حسب نظرية بيتاغور فإن

$CE^2 = CH^2 + EH^2 = CH^2 + CH^2 = 2CH^2 = 2EH^2$

و بالتالي $EH^2 = CH^2 = \frac{C^2}{2}$

و لنا $CE = AC - AE = a - b$



إذن $EH^2 = CH^2 = \frac{CE^2}{2}$

$$= \frac{(a-b)^2}{2}$$

$= \frac{8}{2} = 4$ ($(a-b)^2 = 8$ مما سبق)

$EH^2 = 4$ و بالتالي $EH = \sqrt{4} = 2$ إذن $\boldsymbol{EH = 2}$

5) أ- S مساحة المثلث BEC

طريقة أولى: $S = \frac{EH \times CB}{2} = \frac{2CB}{2} = CB$

بما أن ABC مثلث قائم و متقايس الضلعين في A إذن حسب نظرية بيتاغور فإن

$CB^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ و بالتالي $CB = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

إذن $S = CB = a\sqrt{2}$ و منه $\boldsymbol{S = a\sqrt{2}}$

ب - **طريقة ثانية :** $S = S_{EBC}$

$$= S_{ABC} - S_{AEB}$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{a^2 - ab}{2}$$

$$= \frac{11 + 6\sqrt{2} - 7}{2}$$

$$= \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2(2 + 3\sqrt{2})}{2}$$

$= 2 + 3\sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{S = 2 + 3\sqrt{2}}$

ج - لنا و $\begin{cases} S = a\sqrt{2} \\ S = 2 + 3\sqrt{2} \end{cases}$ إذن $a\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$

و بالتالي $a = \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{(2 + 3\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 6}{2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2} + 3)}{2}$$

$= 3 + \sqrt{2}$ إذن $\boldsymbol{a = 3 + \sqrt{2}}$

التمرين عــــ18ـــــدد (2018)

1) أ -

$b = \frac{6-\sqrt{20}}{4}$ $= \frac{6-\sqrt{5\times 4}}{4}$ $= \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$ $= \frac{2(3-\sqrt{5})}{2\times 2}$ $= \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ إذن $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)-(\sqrt{5}-1)}{4}$ $= \frac{5+3\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{4}$ $= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$ $= \frac{2(3+\sqrt{5})}{2\times 2}$ $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

1) أ- $a\times b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{2\times 2} = \frac{3^2-(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$

بما أن $a\times b = 1$ فإن a و b مقلوبان و بالتالي **b مقلوب a**

ب- $a+b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{6}{2} = 3$ إذن **$a+b=3$**

ج- بما أن b هو مقلوب a فإن $\frac{1}{a}=b$ و $\frac{1}{b}=a$

و بالتالي $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2}{b^2a^2}$

$= \frac{b^2+a^2}{b^2a^2}$

$= \frac{a^2+b^2}{1^2}$

$= a^2+b^2$ إذن $\boldsymbol{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = a^2+b^2}$

و بالتالي $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = a^2+b^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$= \frac{9+6\sqrt{5}+5+9-6\sqrt{5}+5}{4}$

$= \frac{28}{4} = 7$

إذن **$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = 7$**

1) أ- بما أن $4 < 5 < 6{,}25$ و كل الأعداد موجبة فإن $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6{,}25}$

و بالتالي $2,5 < \sqrt{5} < 2$ و منه $2 \le \sqrt{5} \le \frac{5}{2}$

ب ـ لدينا $\frac{5}{2} \le \sqrt{5} \le 2$ إذن $3 + \frac{5}{2} \le 3 + \sqrt{5} \le 3 + 2$ و بما أن $\frac{1}{2}$ عدد موجب قطعا

فإن $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+3\right) \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+3\right) \le \frac{1}{2}(2+3)$ يعني $\frac{11}{4} \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \le \frac{5}{2}$ و منه $\frac{11}{4} \le a \le \frac{5}{2}$

بما أن $\frac{11}{4} \le a \le \frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2}$ و $\frac{11}{4}$ مخالفان لصفر و لهما نفس العلامة فإن $\frac{1}{\frac{5}{2}} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{\frac{11}{4}}$

يعني $\frac{2}{5} \le \frac{1}{a} \le \frac{4}{11}$ و بما أن b هو مقلوب a فإن $b = \frac{1}{a}$ و بالتالي $\frac{4}{11} \le b \le \frac{2}{5}$

و مدى هذا الحصر هو $\frac{2}{5} - \frac{4}{11} = \frac{22-20}{55} = \frac{2}{55} = 0,036\ldots \sim 0,04$

التمرين عــ19ـــدد (2019)

1) أ- $a = 12 + \sqrt{200} - \sqrt{8}$

$$= 12 + \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{4 \times 2}$$

$$= 12 + 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$= 12 + (10-2)\sqrt{2}$$

$$= 12 + 8\sqrt{2}$$

$$= 2 \times 6 + 2 \times 4\sqrt{2}$$

$= 2(6 + 4\sqrt{2})$ إذن $a = 2(6+4\sqrt{2})$

ب ـ بما أن $(3\sqrt{3})^2 = 27$ و $(4\sqrt{2})^2 = 32$ و $27 < 32$

فإن $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$ و لنا $3\sqrt{3}$ و $4\sqrt{2}$ موجبان إذن $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$

بما أن $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$ فإن $3\sqrt{3} + 6 < 4\sqrt{2} + 6$

و 2 عدد موجب قطعا إذن $2(3\sqrt{3}+6) < 2(4\sqrt{2}+6)$ أي $b < a$

2)

$(2+2\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2$ $= 4 + 8\sqrt{2} + 8$ $= 12 + 8\sqrt{2}$ $= 2(6 + 4\sqrt{2})$ $= a$ إذن $a = (2+2\sqrt{2})^2$	$(3+\sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 9 + 6\sqrt{3} + 3$ $= 12 + 6\sqrt{3}$ $= 2(6 + 3\sqrt{3})$ $= b$

	إذن $b = (3+\sqrt{3})^2$

$c = \frac{3+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{2}}$ إذن $c^2 = \left[\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{(2+2\sqrt{2})^2} = \frac{b}{a}$ و بما أن $b < a$

و a عدد موجب قطعا فإن $b \times \frac{1}{a} < a \times \frac{1}{a}$

و منه $\frac{b}{a} < 1$ أي $c^2 < 1$

ب- لدينا $c^2 < 1$ يعني $c^2 < 1^2$ و c و 1 عددان موجبان إذن $c < 1$

ولدينا $c - \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$

و بما أن $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ فإن $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$

و بالتالي $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2$ و منه $\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} > 0$ يعني $c - \frac{1}{2} > 0$ يعني $c > \frac{1}{2}$

لنا $\begin{cases} c < 1 \\ c > \frac{1}{2} \end{cases}$ و يعني $\frac{1}{2} < c < 1$