امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام		الجمهورية التونسية *** وزارة التربية
دورة 2021		
ضارب الاختبار: 2	الحصّة: ساعتان	الاختبار: الرياضيات

الإصلاح

التمرين الأوّل : (3 نقاط)

يلي كل سؤال من أسئلة هذا التمرين ثلاثة مقترحات للإجابة، أحدها فقط صحيح. أنقل، في كل مرّة، على ورقة تحريرك رقم السّؤال والإجابة الصّحيحة الموافقة له.

1) إذا كان $a=\sqrt{3}(\sqrt{3}-4)+\left|1-3\sqrt{3}\right|$ فإنّ :

أ) $a=2-\sqrt{3}$ ب) $a=3\sqrt{3}-2$ ج) $a=4-7\sqrt{3}$

2) ليكن (O,I,J) معيّنا متعامدا في المستوي حيث $OI=OJ=1$

نعتبر النّقطتين $A(0,\sqrt{3})$ و $B(0,-\sqrt{3})$، لدينا :

أ) $AB=0$ ب) $AB=3$ ج) $AB=2\sqrt{3}$

3) العدد 11111111^2-16 يقبل القسمة على :

أ) 9 ب) 12 ج) 15

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيين $a=\dfrac{12-\sqrt{63}}{9}$ و $b=\dfrac{16+\sqrt{112}}{12}$

إصلاح مناظرة 2021 لمادة الرياضيات

* التمرين الأول:

1)

$$a=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-4\right)+\left|1-3\sqrt{3}\right|$$
$$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 4+3\sqrt{3}-1$$
$$=3-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1$$
$$=2-\sqrt{3}$$

أ

2) $A(0,\sqrt{3})$ و $B(0,-\sqrt{3})$

A و B لهما نفس الفاصلة يعني $x_A=x_B=0$

إذن $AB=\left|y_B-y_A\right|=\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|=\left|-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$

ج

3)

$$11111111^2-16=11111111^2-4^2$$
$$=(11111111-4)(11111111+4)$$
$$=11111107\times 11111115$$

العدد 11111115 يقبل القسمة على 5 و 3 وبالتالي فإن

11111111^2-16 يقبل القسمة على 15

ج

* التمرين الثاني:

1) أ)

$$* \; a=\frac{12-\sqrt{63}}{9}=\frac{12-\sqrt{9}\times\sqrt{7}}{9}=\frac{12-3\sqrt{7}}{9}$$
$$=\frac{3(4-\sqrt{7})}{9}$$
$$=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$$* \; b=\frac{16+\sqrt{112}}{12}=\frac{16+\sqrt{16}\times\sqrt{7}}{12}=\frac{16+4\sqrt{7}}{12}=\frac{4(4+\sqrt{7})}{12}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

ب)

$$a\times b=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\times\frac{4+\sqrt{7}}{3}=\frac{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}{3\times 3}$$
$$=\frac{4^2-(\sqrt{7})^2}{9}=\frac{16-7}{9}$$
$$=\frac{9}{9}=1$$

إذن a هو مقلوب b.

$$= \frac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} + \frac{4+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$$

ب)

$$\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1} = \frac{a(b-1)}{(a-1)(b-1)} + \frac{b(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{a(b-1)+b(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{ab-a+ba-b}{ab-a-b+1}$$

$$= \frac{2ab-a-b}{ab-(a+b)+1}$$

$$= \frac{2ab-(a+b)}{ab-(a+b)+1}$$

ج)

بما أن $\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1} = \frac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} + \frac{4+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

و $\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1} = \frac{2ab-(a+b)}{ab-(a+b)+1}$

فإن $\frac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} + \frac{4+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} = \frac{2ab-(a+b)}{ab-(a+b)+1}$

ونعلم أن a و b مقلوبان إذن $ab=1$

و $a+b = \frac{4-\sqrt{7}}{3} + \frac{4+\sqrt{7}}{3} = \frac{4-\cancel{\sqrt{7}}+4+\cancel{\sqrt{7}}}{3} = \frac{8}{3}$

وبالتالي

$$\frac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} + \frac{4+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} = \frac{2\times 1 - \frac{8}{3}}{1-\frac{8}{3}+1} = \frac{2-\frac{8}{3}}{2-\frac{8}{3}} = 1$$

إذن $\frac{4-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} + \frac{4+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$ عدد صحيح طبيعي

* التمرين الثالث:

1) أ) لدينا $A(2,4)$ و $B(2,0)$: $x_A = x_B = 2$

يعني A و B لهما نفس الفاصلة إذن $(AB)//(OJ)$ ①

ونعلم أن (O,I,J) معينا متعامدا في المستوي يعني $(OJ)\perp(OI)$ ②

من ① و ② نستنتج أن $(AB)\perp(OI)$

ولنا $y_B = 0$ يعني $B\in(OI)$

إذن $(AB)\perp(OI)$ في B

وبالتالي OAB مثلث قائم الزاوية في B.

ب) لدينا OAB مثلث قائم الزاوية في B

إذن حسب نظرية بيتاغور:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$
$$= 2^2 + 4^2$$
$$= 4 + 16$$
$$= 20$$
$$OA = \sqrt{20}$$
$$= \sqrt{4}\times\sqrt{5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

* لنا $x_A = x_B = 2$

يعني $AB = |y_B - y_A|\times OJ$

$= |0-4|\times 1$

$= |-4| = 4.$

* لنا $B\in(OI)$

يعني $OB = |x_B - x_O|\times OI$

$= |2-2|\times 1$

$= |2| = 2$

2) أ) بما أن C مناظرة B بالنسبة إلى O

إذن O منتصف $[BC]$

يعني $x_O = \frac{x_B + x_C}{2}$ و $y_O = \frac{y_B + y_C}{2}$

وبالتالي: $2x_O = x_B + x_C$

$x_C = 2x_O - x_B$

$= 2\times 0 - 2$

$x_C = -2$

$2y_O = y_B + y_C$

$y_C = 2y_O - y_B$

$= 2\times 0 - 0$

$y_C = 0$

إذن $C(-2,0)$

ب) في المثلث ABC لدينا O منتصف $[BC]$ لأن C مناظرة B بالنسبة إلى O
و $(AB)//(OJ)$ لأن A و B لهما نفس الفاصلة
إذن (OJ) يقطع (AC) في منتصفه و بما أن $(AC)\cap(OJ)=\{K\}$
وبالتالي K منتصف $[AC]$

ج) بما أن K منتصف $[AC]$
إذن $x_K=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{2+(-2)}{2}=0$ و $y_K=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2$

ومنه $K(0,2)$

3) أ) بما أن $(OI)\perp(OJ)$ و $B\in(OI)$ و $J\in(OJ)$
فإن OBJ مثلث قائم الزاوية في O
إذن حسب نظرية بيتاغور:

$$BJ^2=OB^2+OJ^2$$
$$=2^2+1^2$$
$$=4+1$$
$$BJ^2=5$$

ومنه $BJ=\sqrt{5}$

ب) في المثلث AMB لدينا:
$$\begin{cases} J\in(MB) \\ O\in(AM) \end{cases}$$ و حيث $(AB)//(OJ)$

إذن حسب مبرهنة طالس

$$\frac{MJ}{MB}=\frac{MO}{MA}=\frac{JO}{BA}$$

ونعلم أن $OJ=1$ و $AB=4$
وبالتالي $\dfrac{MJ}{MA}=\dfrac{MO}{MA}=\dfrac{1}{4}$

ج) * لدينا $\dfrac{MO}{MA}=\dfrac{1}{4}$ يعني $4MO=MA$ و $MA=OA-MO$
يعني $4MO=OA-MO$

يعني $4MO + MO = OA$

$5MO = OA$

$MO = \frac{1}{5} OA$

* لدينا $\frac{MJ}{MB} = \frac{1}{4}$ يعني $4MJ = MB$ و $MJ = BJ - MB$

يعني $4(BJ - MB) = MB$

يعني $4BJ - 4MB = MB$

يعني $4BJ = 4MB + MB$

يعني $4BJ = 5MB$

يعني $MB = \frac{4}{5} BJ$

د) * لدينا $MO = \frac{1}{5} OA$ و $OA = 2\sqrt{5}$

إذن $MO = \frac{1}{5} \times 2\sqrt{5}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$

* لدينا $MB = \frac{4}{5} BJ$ و $BJ = \sqrt{5}$

إذن $MB = \frac{4}{5} \times \sqrt{5}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{5}$

* في المثلث OMB لدينا :

$OM^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{20:5}{25:5} = \frac{4}{5}$

$MB^2 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{80:5}{25:5} = \frac{16}{5}$

$OB^2 = 2^2 = 4$

إذن $OM^2 + MB^2 = OB^2$

وبالتالي حسب عكس نظرية بيتاغور نستنتج أن OMB مثلث قائم في M

4) أ) OMB مثلث قائم الزاوية في M و H المسقط العمودي لـM على (OB)

إذن $MO \times MB = MH \times OB$

يعني $MH = \frac{MO \times MB}{OB}$

يعني $= \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5}}{2}$

يعني $= \frac{\frac{40}{25}}{2} = \frac{40}{25} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{40:10}{50:10} = \frac{4}{5}$

وبالتالي $MH = \frac{4}{5}$

ب) OHM مثلث قائم في H

إذن حسب نظرية بيتاغور $OM^2 = OH^2 + MH^2$

$OH^2 = OM^2 - MH^2$ يعني

$= \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$ يعني

$= \frac{4}{5} - \frac{16}{25}$ يعني

$= \frac{20}{25} - \frac{16}{25}$ يعني

$= \frac{20-16}{25}$ يعني

$= \frac{4}{25}$

ومنه $OH = \sqrt{\frac{4}{25}}$

وبالتالي $OH = \frac{2}{5}$

ج) $H \in (OI)$ حيث $OH = \frac{2}{5}$ إذن $x_H = \frac{2}{5}$

وبما أن $(OI) \perp (MH)$ إذن $x_H = x_M = \frac{2}{5}$ ①

$MH = \frac{4}{5}$ حيث $y_M > 0$ و $y_H = 0$ إذن $y_M = \frac{4}{5}$ ②

من ① و ② نستنتج أن $M\left(\frac{2}{5} ; \frac{4}{5}\right)$

التمرين الرابع:

1) أ) إذا كان $x = \frac{10}{3}$ فإن

$E = 3 \times \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 40 \times \frac{10}{3} + 100$

$= 3 \times \frac{100}{9} - \frac{400}{3} + 100$

$= \frac{300}{9} - \frac{400 \times 3}{3 \times 3} + \frac{100 \times 9}{9}$

$= \frac{300 - 1200 + 900}{9} = 0$

ب)

$\star\ (3x - 10)(x - 10) = 3x^2 - 30x - 10x + 100$

$= 3x^2 - 40x + 100$

$= E$

ج) $E = 0$

يعني $(3x - 10)(x - 10) = 0$

يعني $3x - 10 = 0$ أو $x - 10 = 0$

يعني $3x = 10$ | $x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

④

2) أ) في المثلث MBJ لدينا $M\hat{B}J = 60°$

و $B\hat{M}J = A\hat{M}I = 60°$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس و AIM مثلث متقايس الأضلاع

ومنه $M\hat{J}B = 180° - (60° + 60°)$

$= 180° - 120°$

$= 60°$

وبالتالي MBJ مثلث متقايس الأضلاع.

ب) بما أن AMI مثلث متقايس الأضلاع قيس طول ضلعه يساوي a

إذن قيس طول ارتفاعه يساوي $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ومنه: $S_1 = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$

$$= \frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

* MBJ مثلث متقايس الأضلاع قيس طول ضلعه يساوي $(5-a)$

إذن قيس طول ارتفاعه يساوي $\frac{(5-a)\sqrt{3}}{2}$

ومنه $S_2 = \frac{(5-a)(5-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$$= \frac{(5-a)^2\sqrt{3}}{4}$$

* $4S_2 - S_1 = 4 \times \frac{(5-a)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4(5-a)^2 - a^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4(25 - 10a + a^2) - a^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(100 - 40a + 4a^2 - a^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3a^2 - 40a + 100\right)$$

ج) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$ يعني $4S_2 = S_1$ يعني $4S_2 - S_1 = 0$

يعني $\frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2 - 40a + 100) = 0$

إذن a هو حل للمعادلة $E = 3x^2 - 40x + 100 = 0$

يعني $x = \frac{10}{3} < 5$ أو $x = 10 > 5$

وبما أن $0 < a < 5$

فإن $a = \frac{10}{3}$

التمرين الخامس :

1) أ) لنا ABC مثلث قائم في A يعني $(AC) \perp (AB)$ ①

وبما أن M و C نقطتان من Δ فإن $(AC) \perp \Delta$ ②

من ① و ② نستنتج أن $\Delta // (AB)$

ومنه $(MC) // (AB)$

ب) في المثلث ADB لدينا :

$\begin{cases} M \in (BD) \\ C \in (AD) \end{cases}$ حيث $(MC) // (AB)$

حسب مبرهنة طالس :

$$\frac{DB}{DM} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{MC}$$

2) أ) • الزاويتان $C\hat{M}B$ و $A\hat{B}M$ متبادلتان داخليا حاصلتان عن تقاطع $(MC) // (AB)$ مع (BM) إذن هما متقايستان

وبالتالي $A\hat{B}M = C\hat{M}B$ ①

• $[BM)$ منصف الزاوية $A\hat{B}C$ إذن $A\hat{B}M = M\hat{B}C$ ②

من ① و ② نستنتج أن $C\hat{M}B = C\hat{B}M$

وبالتالي BCM مثلث متقايس الضلعين في C

ب) حسب 1)ب) $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{MC}$

• ABC مثلث متقايس الضلعين وقائم الزاوية في A

حسب نظرية بيتاغور : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= 2^2 + 2^2$

$= 4 + 4$

$= 8$

$BC = \sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

وبما أن BCM مثلث متقايس الضلعين في C فإن $BC = CM$

إذن $CM = 2\sqrt{2}$

وبالتالي $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{AB}{CM} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3) لدينا $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ يعني $\sqrt{2}\, DA = DC$

يعني $DA = \dfrac{DC}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(AC - AD)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} AC - \frac{1}{\sqrt{2}} AD$$

$$\sqrt{2} \times \left(DA + \frac{1}{\sqrt{2}} AD = \frac{1}{\sqrt{2}} AC\right)$$
$$\sqrt{2}\, DA + AD = AC$$

يعني $DA(\sqrt{2} + 1) = AC$

يعني $DA = \dfrac{AC}{\sqrt{2} + 1}$

يعني $DA = \dfrac{2}{\sqrt{2} + 1} \dfrac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)}$

يعني $= \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$

يعني $= \dfrac{2(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$

ومنه $DA = 2(\sqrt{2} - 1)$