| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>ET DE LA FORMATION | SESSION<br>DE<br>CONTROLE | EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION DE JUIN 2009 |
|---|---|---|
| SECTION : MATHEMATIQUES | | |
| EPREUVE : MATHEMATIQUES | DURÉE : 4 Heures | COEFFICIENT : 4 |

***Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4est à rendre avec la copie.***

## Exercice 1 ( 3 points )

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

**1)** Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\overline{z}$ de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

**2)** Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

a) la droite (AB) privée de A

b) le segment [AB] privé de A

c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

**3)** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n = e^{u_n}$ est

a) une suite arithmétique de raison (– 2)

b) une suite géométrique de raison (– 2)

c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

**4)** La limite de $x\ln(1+\frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0

b) 1

c) 2

**Exercice 2 (5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ .

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et $\Delta$.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $3$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution $\alpha$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la droite $\Delta$ et la courbe $\mathscr{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$ ).

3) On désigne par $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_\alpha^1 [f(x)]^n \, dx$ .

a) Calculer $u_1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 3 (4 points)**

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.

2) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que la suite $(v_n)$ est décroissante.

3) Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$

a) Montrer que $(w_n)$ est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

## Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que S(A) = B

   b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit ( $\Gamma$ ) le cercle de centre I et passant par A.

   Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle ( $\Gamma$ ) respectivement en M et P.

   a) Tracer ( $\Gamma$ ) et placer les points M et P.

   b) Justifier que le point C appartient à ( $\Gamma$ ).

3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   b) En déduire que S(M) = N .

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

## Exercice 5 ( 3 points )

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$ .

1) a) Vérifier que (0, – 2) est une solution de (E) .

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\Delta$ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de $\Delta$ d'abscisse 0 .

   a) Montrer que si M est un point de $\Delta$ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

   b) Soit N un point de $\Delta$ de coordonnées (x, y) .

      Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.

   c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : ……………. N° d'inscription : …………. Série : ………….
Nom et prénom : ……………………………………………………………
Date et lieu de naissance : ……………………………………………………

Signature des Surveillants
………………
………………

Annexe à rendre avec la copie

**Exercice 4**