Examen du baccalauréat - Session principale - juin 2014

Section Mathématiques

Épreuve de Mathématiques

Corrigé

Exercice 1

1) a) $A(0,0,0)$, $C(6,6,0)$ et $H(0,6,6)$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$.

b) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (P) donc $(P): x-y+z+d=0$ et puisque A est un point de (P), il en résulte que $(P): x-y+z=0$.

c) $\begin{cases}(EG)\parallel(AC)\\(EB)\parallel(CH)\end{cases}$ donc les plans (P) et (Q) sont parallèles donc $(Q): x-y+z+d=0$,

or $B(6,0,0)\in(Q)$, il en résulte que $d=-6$. D'où $(Q): x-y+z-6=0$.

2) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$. On en déduit que la sphère S a pour rayon $R=\sqrt{3}$ et pour centre $I(1,-1,1)$.

b) Soit (Δ) la perpendiculaire à (Q) et passant par A, $(\Delta):\begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha\\z=\alpha\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$J(x,y,z)\in\Delta\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha\\z=\alpha\\x-y+z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\x=2\\y=-2\\z=2\end{cases}$, il en résulte que $J(2,-2,2)$.

$\begin{cases}A\in S\\J\in S\\I=A*J\end{cases}$, on en déduit que [AJ] est un diamètre de S.

c) $d(I,Q)=IJ=\sqrt{3}=R$ et $d(I,P)=IA=\sqrt{3}=R$ donc la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J.

3) a) $A'=t(A)\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$ donc $A'(2,4,2)$.

On pose $J'(x,y,z)$. $J'=t(J)\Leftrightarrow \overrightarrow{JJ'}=\vec{u}\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ y+2=4 \\ z-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$ donc $J'(4,2,4)$.

b) Soit I' l'image de I par t.

On pose $I'(x,y,z)$. $I'=t(I)\Leftrightarrow \overrightarrow{II'}=\vec{u}\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+1=4 \\ z-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}$ donc $I'(3,3,3)$.

Ainsi l'image de S par t est la sphère S' de centre $I'(3,3,3)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

c) $\vec{u}.\vec{n}=0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur de P et de Q, il en résulte que $t(P)=P$ et $t(Q)=Q$.

La sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J donc $S'=t(S)$ est tangente à chacun des deux plans $t(P)=P$ et $t(Q)=Q$ respectivement en A' et J'.

Exercice 2

1) a) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{BD}{AC}=\frac{1}{3}$.

b) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{OB}{OA}=\frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC}=\frac{1}{3} \end{cases}$ donc O est le centre de f.

2) a) On sait que [OA] est la hauteur issue de A dans le triangle ABD.

$f(C)=D$ et $f(D)=D'$ donc $(DD')\perp(CD)$ et $(CD)\parallel(AB)$ par suite $(DD')\perp(AB)$, il en résulte que (DD') est la droite qui porte la hauteur issue de D dans le triangle ABD.

D'autre part $f(D)=D'$ donc $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OD'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $D'\in(OA)$. On en déduit que D' est l'orthocentre du triangle ABD.

On sait que $f(D)=D'$ donc $OD=3OD'$ et puisque $OA=3OD$ donc $OA=9OD'$.

b) On sait que $f(A)=B$, $f(B)=B'$, $f(C)=D$ et $f(D)=D'$, puisque ABCD est un losange donc BB'DD' est un losange.

3) a) g est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{3}$ et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$.

b) $g(O)=f\circ S_{(AC)}(O)=f(O)=O.$

$g(A)=f\circ S_{(AC)}(A)=f(A)=B.$

$g(B)=f\circ S_{(AC)}(B)=f(D)=D'.$

$g(C)=f\circ S_{(AC)}(C)=f(C)=D.$

$g(D)=f\circ S_{(AC)}(D)=f(B)=B'$.

c) Puisque le rapport de g est $\frac{1}{3}$ et $g(O)=O$ donc O est le centre de g et comme $g(A)=B$ donc Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieur de $\widehat{AOB}$.

d) $M\in\Delta\cap(AB)$ donc $g(M)\in g(\Delta)\cap g((AB))$ donc $g(M)\in\Delta\cap(BD')=\{N\}$ d'où $g(M)=N$.

De même, on montre que $g(Q)=P$ par suite $MQ=3NP$.

Exercice 3

1) a) Puisque $a\equiv 1(\text{mod}10)$ donc $a^n\equiv 1(\text{mod}10), n\in\mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $1+a+........+a^9\equiv 10(\text{mod}10)\equiv 0(\text{mod}10)$.

b) On sait que $a\equiv 1(\text{mod}10)$ donc $a-1\equiv 0(\text{mod}10)$ donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a-1=10k$ et $1+a+........+a^9\equiv 0(\text{mod}10)$ donc il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $1+a+........+a^9=10k'$, il en résulte que $a^{10}-1=10^2kk'$ ou encore $a^{10}-1\equiv 0(\text{mod}10^2)$ d'où $a^{10}\equiv 1(\text{mod}10^2)$.

2) a)

Reste de b (mod10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de b^4 (mod10)	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

b) Soit r le reste de b (mod 10).

Si $r\in\{0,2,4,6,8\}$, alors 2 divise b et 10 donc $b\wedge 10\neq 1$.

Si $r=5$, alors 5 divise b et 10 donc $b\wedge 10\neq 1$.

Si $r\in\{1,3,7,9\}$ alors b n'est divisible ni par 2 ni par 5 donc $b\wedge 10=1$.

Ainsi $b\wedge 10=1\Leftrightarrow r\in\{1,3,7,9\}$ et d'après a) $r\in\{1,3,7,9\}\Leftrightarrow b^4\equiv 1(\text{mod}10)$, on en déduit que $b^4\equiv 1(\text{mod}10)\Leftrightarrow b\wedge 10=1$.

3) a) Si b est premier avec 10 alors d'après 2)b) $b^4\equiv 1(\text{mod}10)$ et d'après 1) $(b^4)^{10}\equiv 1(\text{mod}10^2)$ d'où $b^{40}\equiv 1(\text{mod}10^2)$.

b) $67\wedge 10=1$ donc $67^{40}\equiv 1(\text{mod}10^2)$ et $67^2\equiv 89(\text{mod}10^2)$ donc $67^{42}\equiv 89(\text{mod}10^2)$.

Exercice 4

1) a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} 1+\tan x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1+\tan x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[, f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}$.

c) Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[, f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}>0$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $f(0)=\ln 1=0$ donc $O\in(C)$.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$ donc $A\in(C)$.

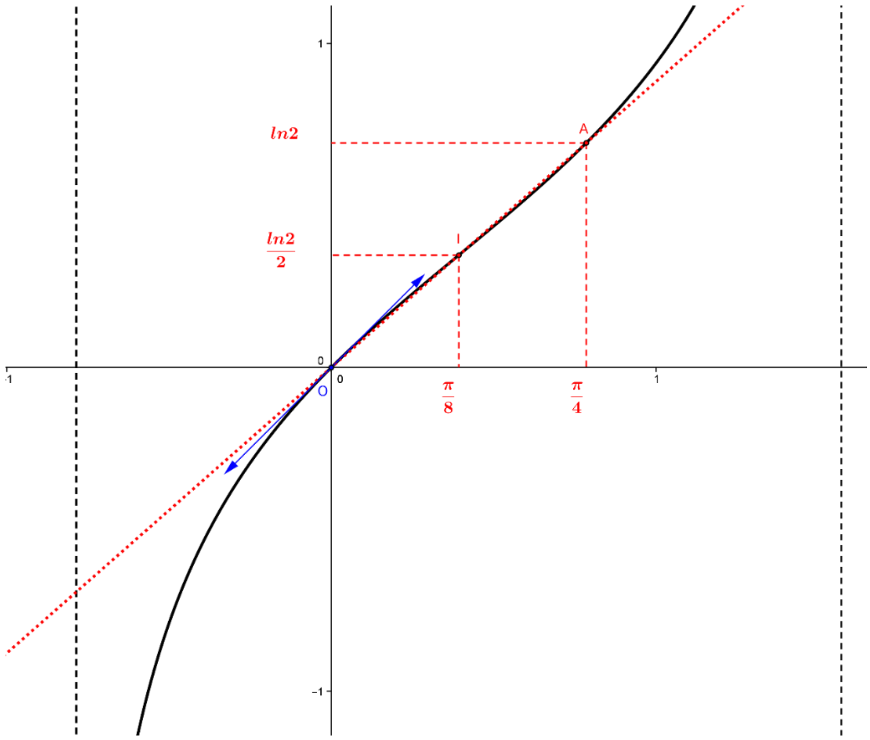
$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$ donc $I\in(C)$.

b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)=\ln 2-f(x).$$

c) Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\pi}{4}-x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ donc I est un centre de symétrie de (C).

3) $T_O : y=x$.



4) a) Les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à I donc elles ont la même aire.

b) On désigne par $B\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{4},0\right)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = A_{\text{triangleOBI}} - S_1 + A_{\text{trapèzeBCAI}} + S_2 = A_{\text{triangleOBI}} + A_{\text{trapèzeBCAI}} = A_{\text{triangleOAC}} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

b) La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\neq 0$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc

f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1+\tan y}{1+\tan^2 y}$ avec

$f^{-1}(x)=y, y\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow \ln(1+\tan y)=x\Leftrightarrow \tan y=e^x-1.$ on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R},\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}$.

c) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}dx=\int_0^{\ln 2}\left(f^{-1}\right)'(x)dx=\left[f^{-1}(x)\right]_0^{\ln 2}=f^{-1}(\ln 2)-f^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}.$